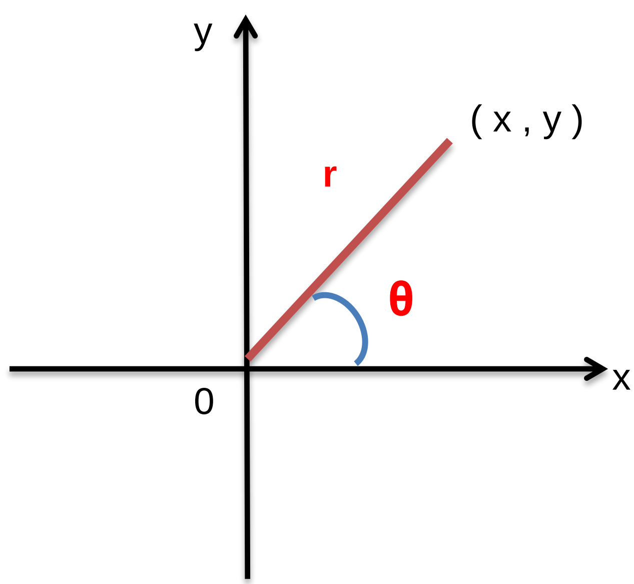
Objetivo 2: Reconocer cantidades vectoriales y escalares

Sistema de Coordenadas

Es un método para describir la posición de un objeto mediante coordenadas, donde los ejes horizontal y vertical se cruzan en un punto que se considera el origen. Las coordenadas cartesianas también se llaman coordenadas rectangulares.

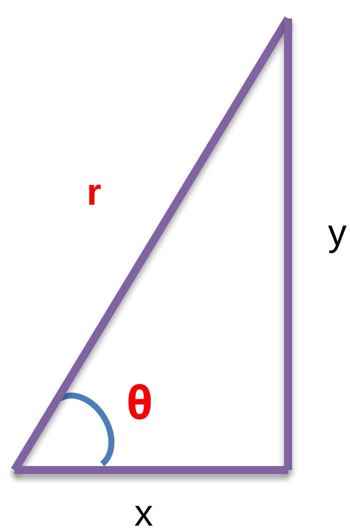
En ocasiones es más conveniente representar un punto en el plano por medio de sus coordenadas polares **(r, θ) r** es la distancia desde el origen hasta el punto que tiene coordenadas cartesianas **(x, y)** y **θ** es el ángulo entre **r** y un eje fijo. Este fijo suele ser el **x** positivo y **θ** es el ángulo y suele medirse en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj a partir de él.



$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



(Fig. 1)

El triángulo rectángulo utilizado para relacionar (x,y) con (r,θ)

De acuerdo con la Fig. 1 del triángulo rectángulo se pueden obtenerse con las ecuaciones

$$\mathrm{x} = \mathrm{r}\cos\theta$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{r}\sin\theta$$

Las definiciones de trigonometría indica, además,

$$\tan\theta = \frac{x}{y}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Estas cuatro expresiones que relacionan las coordenadas **(x , y)** con las coordenadas **(r , θ)** cuando **θ** es un ángulo medido en sentido contrario a la manecillas del reloj a partir del eje **x** positivo.

Cantidades vectoriales y escalares

Una cantidad escalar está especificada por un valor con la unidad apropiada y no tiene dirección.

Una cantidad vectorial tiene tanto magnitud como dirección.

Ejercicios

Cambios de Notación (Ejercicios de la guía del Objetivo 1 y 2)

1.- Los siguientes vectores están en notación polar. Grafíquelos y calcule las componentes horizontal y vertical para convertirlos en notación rectangular.

a) $\vec{A} = (4m, 60°)$

b) $\vec{B} = (2{,}7m, 0°)$

c)$\vec{C} = (5m, 150°)$

d) $\vec{D} = (5{,}6m, 270°)$

e) $\vec{E} = (2m, 45°)$

f) $\vec{F} = (8{,}2m, 120°)$

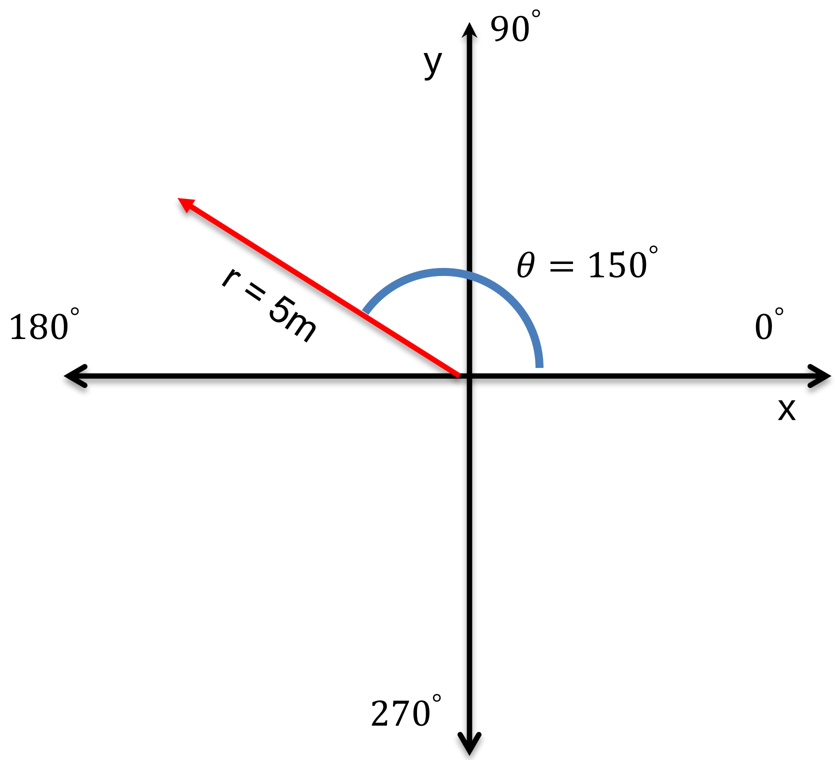
g) $\vec{G} = (1{,}8{,}180°)$

h)$\overrightarrow{H} = (2{,}9{,}300°)$

i) $\vec{I} = \left(5\sqrt{3m}, 60°\right)$

j) $\vec{J} = \left(7\sqrt{2}m, 225°\right)$

Ejemplo: c)$\vec{C} = (5m, 150°)$

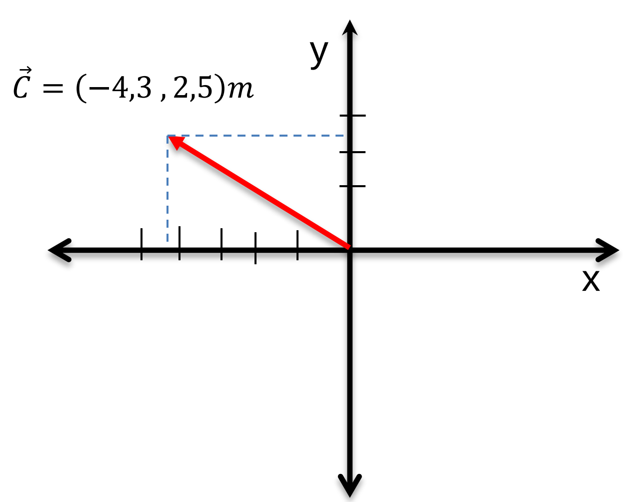


$$x = r\cos\theta$$

$$x = 5m\cos 150^{\circ}$$ = -4,3 m

$$y = r\sin\theta$$

$$y = 5m\sin 150^{\circ}$$ =2,5m



2) Los siguientes vectores están en notación rectangular. Grafíquelos, calcule el módulo y la dirección para convertirlos en notación polar.

g) $\vec{G} = -5m\,\boldsymbol{i}$ + 0m**j**

h) $\vec{H} = -6m\,i$ + 6mj

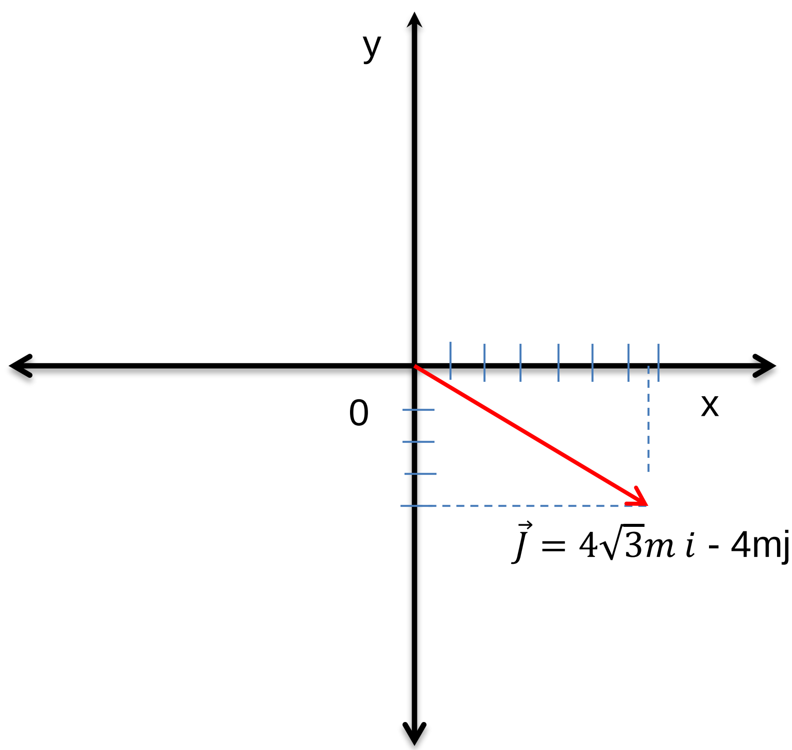
i) $\vec{I} = 1m\,i$ + $\sqrt{3}$ mj

j) $\vec{J} = 4\sqrt{3}m\,i$ - 4mj

k) $\vec{K} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\,i$ - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ j

l) $\vec{L} = \frac{6\sqrt{3}}{2}i$ - $\frac{6}{2}$ j

Ejemplo j) $\vec{J} = 4\sqrt{3}m\,i$ - 4mj



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ Con Pitágoras se calcula la magnitud del vector o módulo, con esto establecemos la ecuación

r = $\sqrt{(4\sqrt{3}mi)^2 + (-4mj)^2}$ Sustituimos los valores y calculamos

$$r = \sqrt{16\,.\,3m^2 + 16m^2}$$

$$r = \sqrt{48m^2 + 16m^2} = \sqrt{64}m^2 =$$ r = 8m

Ahora con trigonometrías se calcula la dirección del vector

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{-4}{4\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = -0{,}58$$

$$\theta = arctag - 0{,}58$$

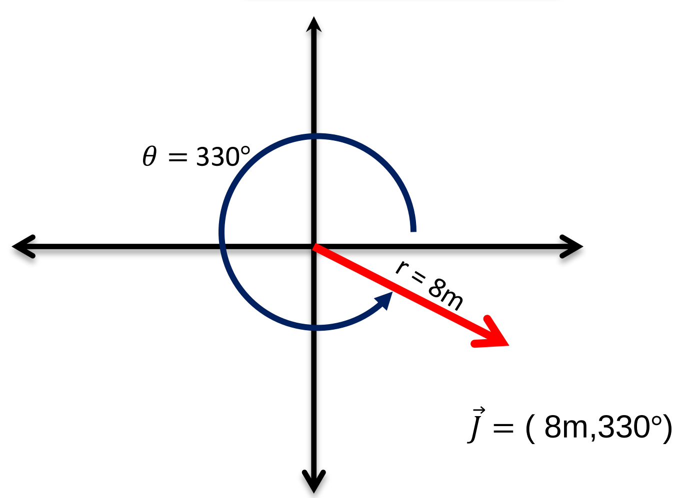
$$\theta = -30{,}1\,° \approx -30°$$

Como está en el tercer cuadrante el ángulo debe estar comprendido entre 270° y 360° por lo tanto,

$$360° - 30° = 330°$$

Entonces el vector $\vec{J} = 4\sqrt{3}m\,i$ - 4mj queda como,

$\vec{J}$ = (8m,330°)



Adición de Vectores

1.- Una avioneta vuela 22Km directo al oeste desde la ciudad A hasta la ciudad B y después 31Km en la dirección de 45° al norte del este de la ciudad B hasta la ciudad C

a) en línea recta, ¿A qué distancia está la ciudad C de la ciudad C?

b) Respecto de la ciudad A, ¿En que dirección está la ciudad C?

Solución: En este ejemplo se muestran dos formas de encontrar la resultante de dos vectores. El problema se puede resolver en forma geométrica con papel gráfico y transportador, como se muestra en la figura 2. La línea recta que hay desde la Ciudad A hasta la Ciudad C es la resultante **R y es la suma de los dos desplazamientos individuales.**

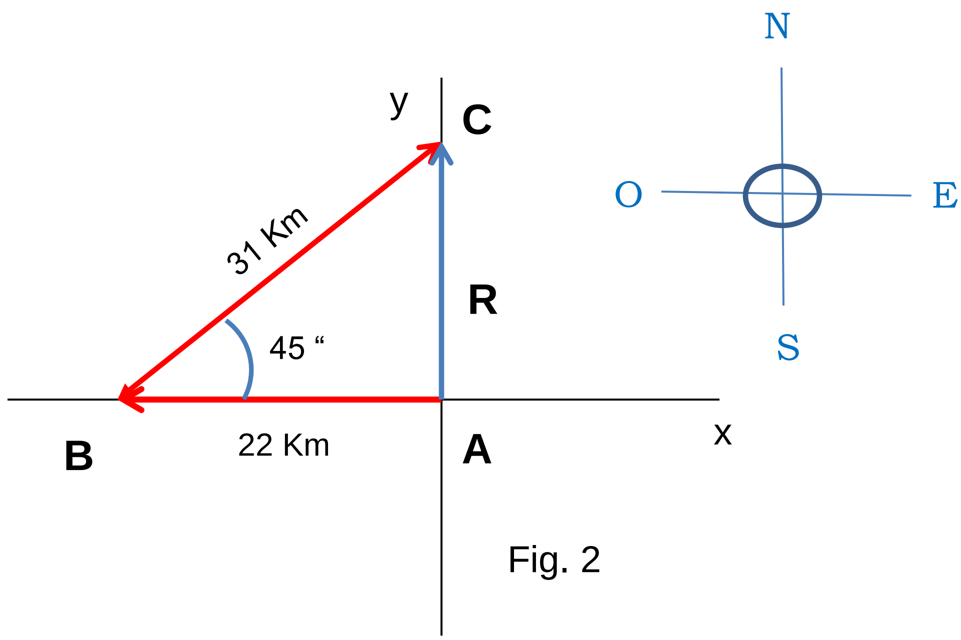


Fig. 2

Para resolver el problema con el método para emplear las componentes para sumar vectores observe que primero se eligió el sistema de coordenadas, donde el eje **x** apunta al Este y el eje **y** apunta al Norte. Primero viaja la avioneta desde la ciudad **A** hasta la ciudad **B** a este desplazamiento lo vamos a denotar $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ y el siguientes desplazamiento desde **B** hasta **C** lo denotamos como $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ **.** Donde la magnitud del Vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ es de 22Km y la dirección es 180° dado que va en sentido al Oeste por lo tanto su coordenada polar es $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ **= (22Km, 180°).** Para el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ la magnitud es 31 Km y la dirección está a 45° al Norte del Este, por lo tanto sus coordenadas polar es $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ **= (31Km,45°).**

Tenemos las componentes polares de los desplazamientos

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ **= (22Km, 180°)** $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ **= (31Km,45°).**

Convertimos en notación Polar a rectangular

$\overrightarrow{AB}$x = 22Km.cos(180°) = -22Km $\overrightarrow{BC}$x = 31Km.Cos (45°) = 21,9 ≈ 22Km

$\overrightarrow{AB}$y = 22Km.sen (180°) = 0Km $\overrightarrow{BC}$y = 31Km.sen(45°)=21,9 ≈ 22Km

Calculamos la suma de sus componentes para obtener la resultante

$\overrightarrow{Rx}$ = (-22 + 22)Km $\overrightarrow{Ry}$ = (0 + 22)Km

$\overrightarrow{Rx}$ = 0Km $\overrightarrow{Ry}$ = 22Km

$\overrightarrow{\boldsymbol{R}} = (\mathbf{0}, \mathbf{22})\boldsymbol{Km}$

Se puede escribir el desplazamiento total en forma de vectores unitarios como

$$\overrightarrow{\boldsymbol{R}} = (\mathbf{0}\boldsymbol{i} + \mathbf{22}\boldsymbol{j})\boldsymbol{Km}$$

Ahora calculamos la magnitud de la resultante con Pitágoras para obtener la distancia de la ciudad C a la ciudad A

$$R^2 = Rx^2 + Ry^2$$

$R = \sqrt{(0Kmi)^2 + (22Kmj)^2}$ = $\sqrt{0Km^2 + 484Km^2}$ = 22Km

b) La dirección en la que está la distancia de ciudad A con respecto a la ciudad C es

$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{22km}{0km} = 22$

$\theta = \tan^{-1} 22 = -90°$

$\theta = 180° - 90° = 90°$

$\boldsymbol{\theta = 90°}$

Producto escalar de dos vectores

En general, el producto escalar de cualquiera dos vectores **A** y **B** es una cantidad escalar igual al producto de la magnitudes de los dos vectores y el coseno del ángulo θ entre ellos:

A . B = *AB* cosθ

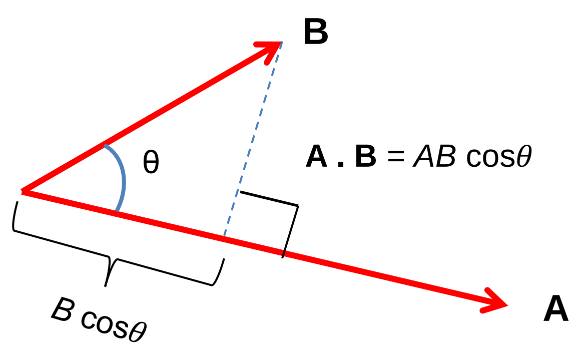


Fig 3

Fig. 3

El producto escalar **A . B** es igual a la magnitud de **A** multiplicada por **B**cosθ, que es la proyección de **B** **sobre** A

El producto escalar es conmutativo, es decir

A . B = B . A

Por último, el producto escalar obedece a la ley distributiva de la multiplicación, por lo que

A . (B . C) = A . B + A . C

Si **A** es perpendicular a **B (θ = 90°),** entonces **A . B = 0**

Si **A** y **B** son paralelos y ambos apuntan en la misma dirección ($\theta = 0°$), entonces **A . B** = *AB*. Si **A** y **B** apuntan en direcciones opuestas ($\theta = 180°$), entonces **A . B** = - *AB*. El producto escalar es negativo cuando $90° < \theta < 180°$.

Los vectores unitarios **i, j** y **k,** están en las direcciones positivas ***x, y*** y ***z,*** *respectivamente*, de un sistema de coordenadas de mano derecha. Por consiguiente, se deduce de la definición **A . B** que los productos escalares de estos vectores unitarios son

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

Los vectores **A . B** pueden expresarse en forma de vectores componentes como

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

Es por ello que el producto escalar **A . B**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Ejemplo: (Problema 1 de la guía **Objetivo 1 y 2** sobre producto escalar)

El vector **A** tiene coordenadas:

$\vec{A}$ **=** 5 unidades $\hat{r}$ + 0° $\hat{\theta}$ y el **B** de

$\vec{B}$ **=** 9 unidades $\hat{r}$ + 60° $\hat{\theta}$ Determine **A . B**

Convertimos a notación rectangular

$\vec{A}$ **= (**5, 0°) →(notación polar)

$A_x = 5\cos 0° = 5$

$A_y = 5\text{sen}0° = 0$

$\vec{A}$ **= (**5, 0)u

$\vec{B}$ **= (**9,60°) →(notación polar)

$B_x = 9\cos 60° = 4{,}5$

$B_y = 9\text{sen}60° = 7{,}8$

$\vec{B}$ **= (**4,5 **,** 7,8)u

Convertimos a unitario y aplicamos el producto escalar o producto punto (también se conoce así)

$\vec{A}$ **=** 5u**i** + 0u**j** $\vec{B}$ **=** 4,5u**i** + 7,8u**j**

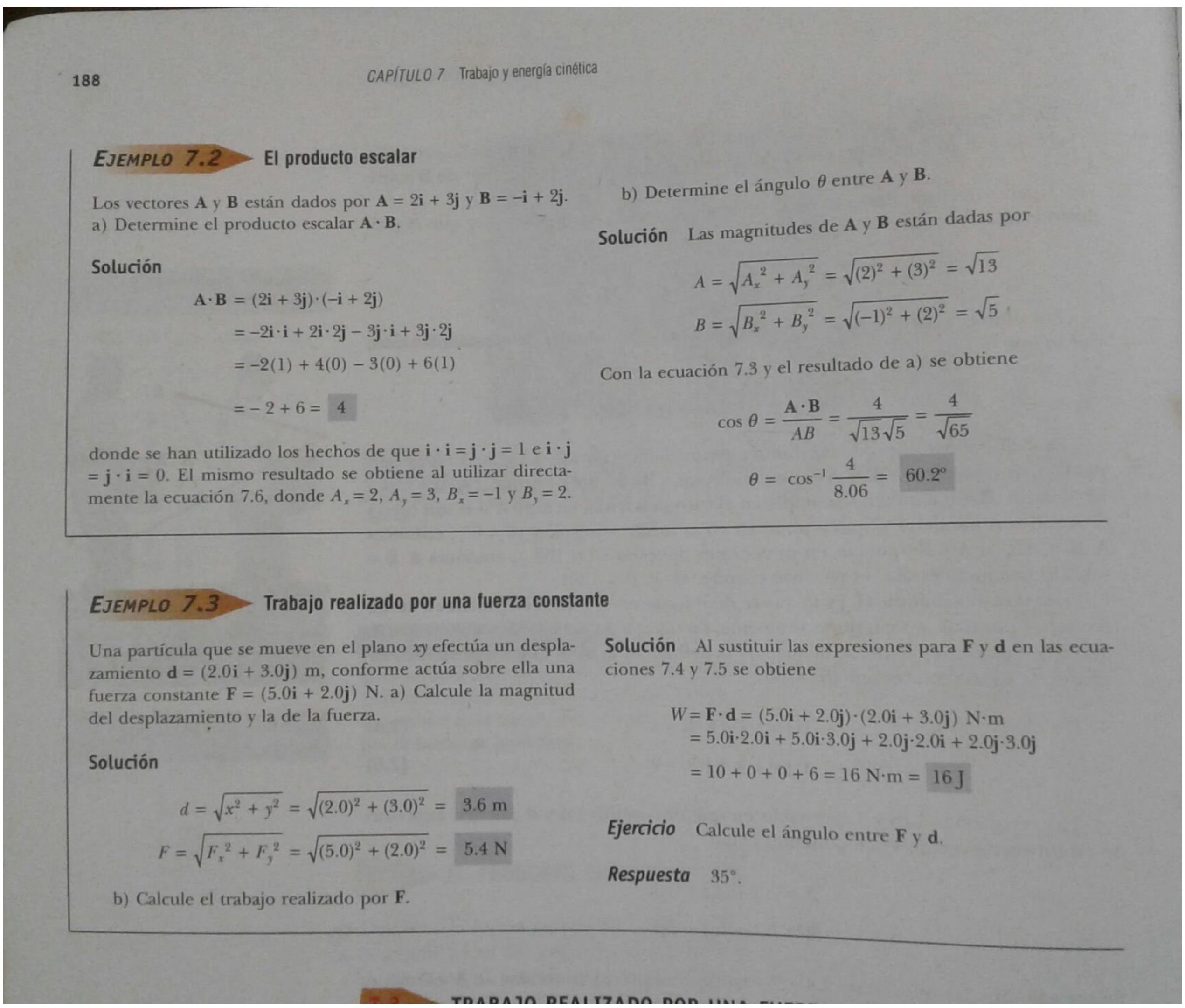
A . B = (5**i** + 0**j**) **.** (4,5**i** + 7,8**j**)

$A \cdot B = (5 \cdot 4{,}5)\overset{1}{\cancel{\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}}} + (0 \cdot 7{,}8)\overset{1}{\cancel{\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}}}$

A . B = 22,5 + 0

A . B = 22,5u

Otros ejemplos (imagen sacado del Serway 5ta Edición, capítulo 7, pág. 188)



188 CAPÍTULO 7 Trabajo y energía cinética

EJEMPLO 7.2 El producto escalar

Los vectores **A** y **B** están dados por **A** = 2**i** + 3**j** y **B** = −**i** + 2**j**.
a) Determine el producto escalar **A · B**.

Solución

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (2\mathbf{i}+3\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{i}+2\mathbf{j})\\ &= -2\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+2\mathbf{i}\cdot2\mathbf{j}-3\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+3\mathbf{j}\cdot2\mathbf{j}\\ &= -2(1)+4(0)-3(0)+6(1)\\ &= -2+6 = \boxed{4}\end{aligned}$$

donde se han utilizado los hechos de que **i · i** = **j · j** = 1 e **i · j** = **j · i** = 0. El mismo resultado se obtiene al utilizar directamente la ecuación 7.6, donde $A_x = 2$, $A_y = 3$, $B_x = -1$ y $B_y = 2$.

b) Determine el ángulo θ entre **A** y **B**.

Solución Las magnitudes de **A** y **B** están dadas por

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

Con la ecuación 7.3 y el resultado de a) se obtiene

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{8.06} = \boxed{60.2^\circ}$$

EJEMPLO 7.3 Trabajo realizado por una fuerza constante

Una partícula que se mueve en el plano *xy* efectúa un desplazamiento **d** = (2.0**i** + 3.0**j**) m, conforme actúa sobre ella una fuerza constante **F** = (5.0**i** + 2.0**j**) N. a) Calcule la magnitud del desplazamiento y la de la fuerza.

Solución

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2.0)^2 + (3.0)^2} = \boxed{3.6\text{ m}}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5.0)^2 + (2.0)^2} = \boxed{5.4\text{ N}}$$

b) Calcule el trabajo realizado por **F**.

Solución Al sustituir las expresiones para **F** y **d** en las ecuaciones 7.4 y 7.5 se obtiene

$$\begin{aligned}W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} &= (5.0\mathbf{i}+2.0\mathbf{j})\cdot(2.0\mathbf{i}+3.0\mathbf{j})\text{ N·m}\\ &= 5.0\mathbf{i}\cdot2.0\mathbf{i}+5.0\mathbf{i}\cdot3.0\mathbf{j}+2.0\mathbf{j}\cdot2.0\mathbf{i}+2.0\mathbf{j}\cdot3.0\mathbf{j}\\ &= 10+0+0+6 = 16\text{ N·m} = \boxed{16\text{ J}}\end{aligned}$$

Ejercicio Calcule el ángulo entre **F** y **d**.

Respuesta 35°.

Producto Vectorial de dos Vectores

Dados cualesquiera vectores **A** y **B** el producto vectorial **A x B** se define como un tercer vector **C, cuya magnitud es** *AB*senθ, donde θ es el ángulo entre **A y B**. Es decir, si **C** está dado por

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

Entonces su magnitud es

$$C = AB\,\text{sen}\theta$$

La cantidad *AB* senθ es igual al área del paralelogramo formado por **A** y **B,** como se muestra en la Fig 4. La dirección de **C es** perpendicular al plano formado por **A** y **B**, y la mejor forma para determinar esta dirección es la regla de la mano derecha ilustrada en la Fig 4. Los cuatro dedos de la mano derecha apuntan a lo largo de **A** y luego "se enrollan" hacia **B** a través del ángulo θ. La dirección del pulgar derecho erecto es la dirección de **A x B = C**. Debido a la notación, **A x B** a menudo se lee **"A cruz B";** de ahí el término *producto cruz.*

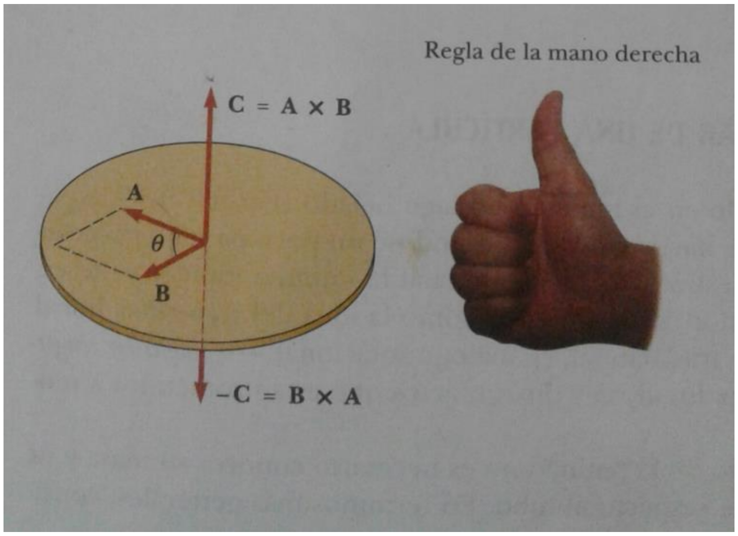


Fig 4

Regla de la mano derecha

Algunas propiedades del producto vectorial que se deprenden de esta definición son las siguientes:

1. A diferencia del producto escalar el producto vectorial no es conmutativo. Por tanto, el orden en el cual se multiplican los dos vectores en un producto cruz es importante:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

2. Si **A** es paralelo a **B** (θ= 0° o 180°), entonces **A x B** = 0; por lo tanto, se deduce que **A x A** = 0.
3. Si **A** es perpendicular a **B**, entonces $|\boldsymbol{A\ x\ B}|$ = *AB*
4. El producto vectorial obedece a la ley distributiva:

A x (B +C) = A x B + A x C

5. La derivada del producto cruz respecto de alguna variable como t es

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A\ x\ B}) = \boldsymbol{A\ x}\ \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\ \boldsymbol{x\ B}$$

A partir de la definición del producto cruz y de la definición de vectores unitarios, que los productos cruz de los vectores unitarios rectangulares **i**, **j** y **k** obedecen a las siguientes reglas:

i x i = j x j = k x k = 0

i x j = -j x i = k

j x k = -k x j = i

k x i = -i x k = j

Los signos son intercambiables en el producto cruz. Por ejemplo, **A** x **(-B)** = **-A** x **(-B)** = **-A** x **B** e **i** x **(-j)** = **-i** x **j**

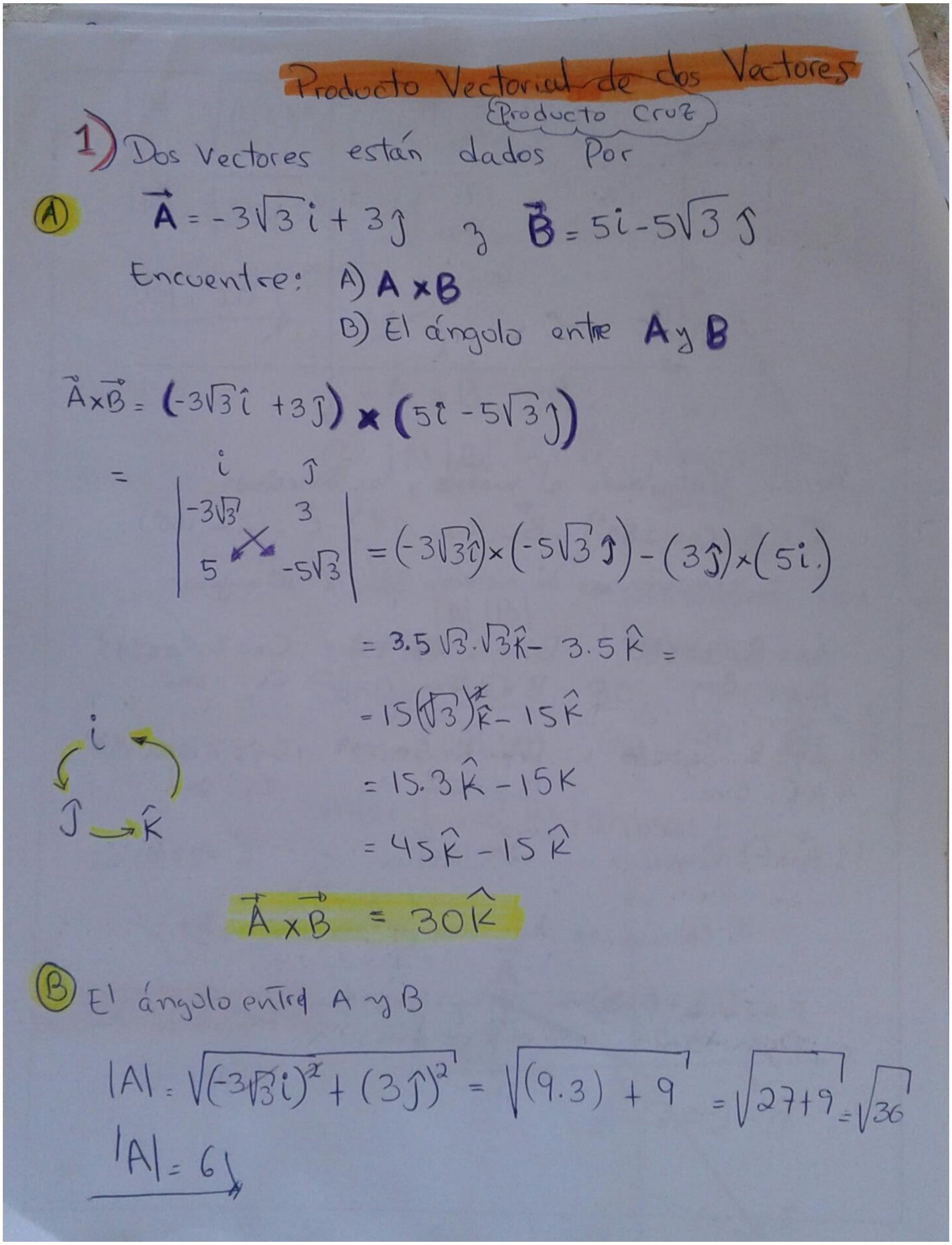
El producto cruz cualquiera dos vectores **A** y **B puede expresarse en la siguiente forma determinante:**

$$\boldsymbol{A\ x\ B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} Ay & Az \\ By & Bz \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} Ax & Az \\ Bx & Bz \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} Ax & Ay \\ Bx & By \end{vmatrix}$$

Desarrollando estas determinantes se obtiene el resultado

A x B = *(AyBz – AzBy)***i** – *(AxBz – AzBx)***j** + *(AxBy – AyBx)***k**

Las siguientes imágenes es un ejemplo del problema 1 de la guía de ejercicios del **Objetivo 1 y 2** en la parte de producto vectorial.



Producto Vectorial de dos Vectores

(Producto Cruz)

1) Dos Vectores están dados Por

(A) $\vec{A} = -3\sqrt{3}\,i + 3j$ y $\vec{B} = 5i - 5\sqrt{3}\,j$

Encuentre: A) **A × B**

B) El ángulo entre **A** y **B**

$$\vec{A} \times \vec{B} = (-3\sqrt{3}\,\hat{i} + 3\hat{j}) \times (5\hat{i} - 5\sqrt{3}\,\hat{j})$$

$$= \begin{vmatrix} i & j \\ -3\sqrt{3} & 3 \\ 5 & -5\sqrt{3} \end{vmatrix} = (-3\sqrt{3}\,i) \times (-5\sqrt{3}\,j) - (3j) \times (5i)$$

$$= 3.5\sqrt{3}.\sqrt{3}\,\hat{k} - 3.5\,\hat{k} =$$

$$= 15(\sqrt{3})^2\,\hat{k} - 15\,\hat{k}$$

$$= 15.3\,\hat{k} - 15K$$

$$= 45\,\hat{k} - 15\,\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 30\,\hat{k}$$

(B) El ángulo entre A y B

$$|A| = \sqrt{(-3\sqrt{3}\,i)^2 + (3j)^2} = \sqrt{(9.3) + 9} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36}$$

$$|A| = 6$$

$$|B| = \sqrt{(5\hat{\imath})^2 + (-5\sqrt{3}\hat{\jmath})^2} = \sqrt{25 + (25 \cdot 3)}$$

$$|B| = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} = 10$$

$$|B| = 10$$

$$C = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$C = |A|\,|B| \operatorname{Sen}\theta$$ despejamos el $\operatorname{Sen}\theta$

$$\operatorname{Sen}\theta = \frac{C}{|A|\,|B|}$$ Sustituimos los Valores.

$$\operatorname{Sen}\theta = \frac{30}{(6)(10)} = \frac{30}{60} = \frac{15}{30} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Sen}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \operatorname{arcosen}\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$\theta = 150^\circ$$