Cinemática en dos dimensiones

Cuando iniciamos este tema definimos los parámetros cinemáticos en forma general en el espacio, y luego los representamos en un sistema de coordenadas cartesiano generado por tres vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, perpendiculares entre sí, así llegamos a las siguientes ecuaciones:

1. $\vec{\boldsymbol{r}} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\widehat{\boldsymbol{k}}$ Posición
2. $\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \Delta x\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Delta y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \Delta z\widehat{\boldsymbol{k}}$ Deslazamiento
3. $\vec{\boldsymbol{v}} = v_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + v_x\widehat{\boldsymbol{k}}$ Velocidad
4. $\vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a_x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{a_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{a_z}\widehat{\boldsymbol{k}}$ Aceleración

Luego trabajamos estos conceptos en un sistema coordenado para estudiar movimientos en una dimensión. Y determinamos expresiones específicas para estas ecuaciones en una dimensión, así obtuvimos:

1. $\vec{\boldsymbol{r}} = r_x\hat{\boldsymbol{\imath}} = x\hat{\boldsymbol{\imath}}$ Posición
2. $\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \Delta x\hat{\boldsymbol{\imath}} = (x_f - x_i)\hat{\boldsymbol{\imath}}$ Deslazamiento
3. $\boldsymbol{v}_x = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\imath}} = \frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{\imath}}$ Velocidad
4. $\boldsymbol{a_x} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\imath}} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\boldsymbol{\imath}}$ Aceleración

Ahora ampliaremos nuestro estudio analizando el movimiento en dos dimensiones, es decir en el plano y veremos con claridad como las otras características vectoriales de los parámetros cinemáticos afectan sus propiedades.

Vector posición: Quedará completamente definido adicionando a la ecuación de posición la componente de la dimensión adicional que se estudia, en nuestro caso tomaremos la correspondiente a la dirección $\boldsymbol{j}$, es decir la del eje y del sistema cartesiano, así la posición estará expresada por,

$$\vec{\boldsymbol{r}} = r_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{r_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (1)$$

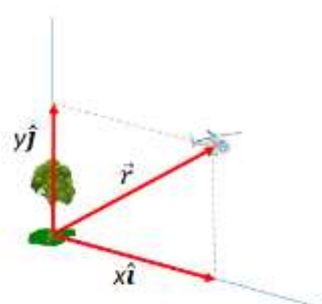


Figura 1. Representación del vector posición de una partícula en un sistema bidimensional y su descomposición en sus componentes.

Vector desplazamiento: En el plano el vector desplazamiento queda completamente definido, al determinar sus componentes así obtenemos que. Ver figura 2.

$$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \Delta x\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Delta y\hat{\boldsymbol{\jmath}} = (x_f - x_i)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y_f - y_i)\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (2)$$

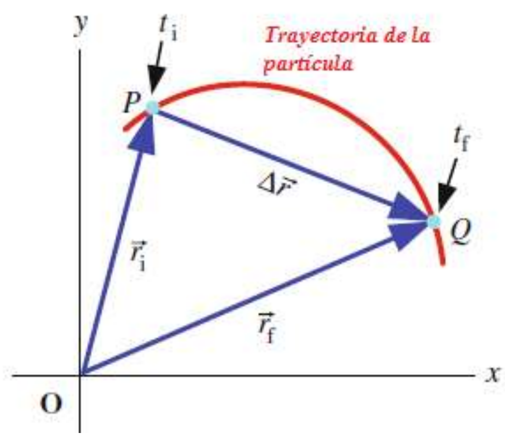


Figura 2. Representación del vector desplazamiento de una partícula en un sistema bidimensional

Vector Velocidad: la velocidad instantánea se expresa como

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (3)$$

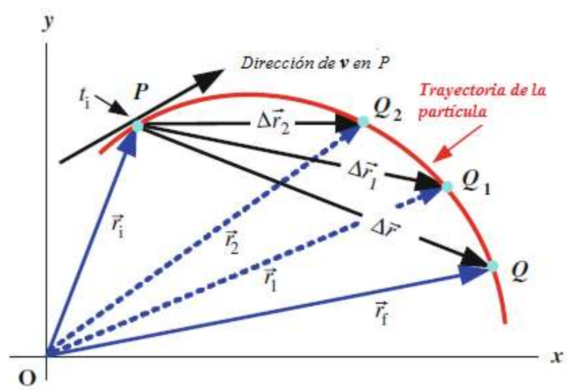


Figura 3. Representación de la dirección del vector Velocidad a medida que Δt tiende a cero. La velocidad media tiene la misma dirección que Δ***r***, pero la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria.

Vector aceleración: Al igual que en el movimiento en una dimensión (movimiento rectilíneo), la aceleración describe cómo cambia la velocidad de la partícula; pero ahora veremos que la aceleración cambiará con los cambios de dirección de la velocidad, es decir, la aceleración describirá los cambios tanto en la magnitud como en la dirección de la velocidad. La figura a continuación muestra lo que hemos dicho,

Figura 4. El automóvil frena al tomar la curva, cambiando así, tanto la dirección como la magnitud del vector velocidad.

La expresión para la aceleración en dos dimensiones que determinada por la expresión,

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{a} = a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Otra manera de escribir la aceleración es en función a la posición y las componentes quedarán expresadas de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (5)$$

Ya sabemos que el vector velocidad es tangente a la trayectoria de la partícula, así que cualquier partícula que sigue una trayectoria curva está acelerando, pues los cambios de dirección de la velocidad en la trayectoria generan esa aceleración. La dirección de la aceleración, si la trayectoria es curva, apuntará hacia el lado cóncavo de la trayectoria, es decir, hacia el interior de la curva descrita por la partícula, la misma dirección de $\Delta\boldsymbol{v}$.

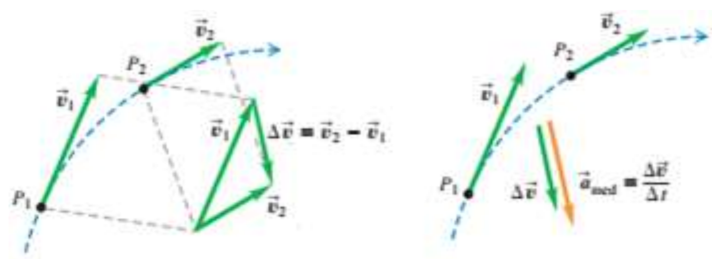


Figura 5. La figura muestra que la aceleración siempre tendrá la misma dirección que $\Delta\mathbf{v}$ y su dirección apuntará hacia el lado cóncavo de la trayectoria del móvil

Componente perpendicular y paralela de la aceleración: Las componentes del vector aceleración nos permiten describir los cambios de rapidez y dirección de una partícula, podemos observar que la componente de la aceleración paralela a la trayectoria de la partícula nos indica acerca de los cambios en el módulo del vector velocidad, la *rapidez* de la partícula. De igual manera la componente perpendicular a la trayectoria nos indica los cambios en la dirección del movimiento de la partícula; en la figura se muestran ambas componentes, perpendicular y paralela del vector aceleración.

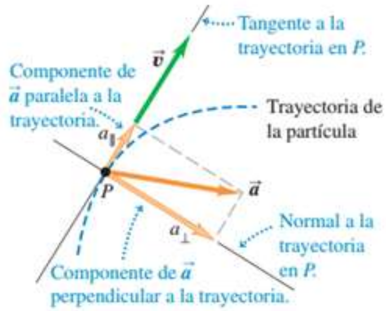


Figura 6. Descomposición del vector aceleración de una partícula en sus componentes, paralela a la trayectoria (es decir, tangente a la trayectoria), y perpendicular a la trayectoria (es decir, en la normal a la trayectoria).

La figura 7 muestra la trayectoria curva de una partícula que se mueve en tres situaciones distintas: (a) rapidez constante, (b) creciente y (c) decreciente. Si el módulo de la velocidad es constante, $\boldsymbol{a}$ es perpendicular, a la trayectoria y al vector velocidad, y apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria (figura 4a). Si el módulo de la velocidad aumenta, todavía hay una componente perpendicular de $\boldsymbol{a}$, que apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria, a la derecha de la normal, también tiene una componente paralela con la misma dirección que $\boldsymbol{v}$ (figura 4b). Si el módulo de la velocidad disminuye, la componente paralela de la aceleración tiene dirección opuesta a $\boldsymbol{v}$ y el vector aceleración, apunta hacia atrás, a la izquierda de la normal a la trayectoria (figura 4c).

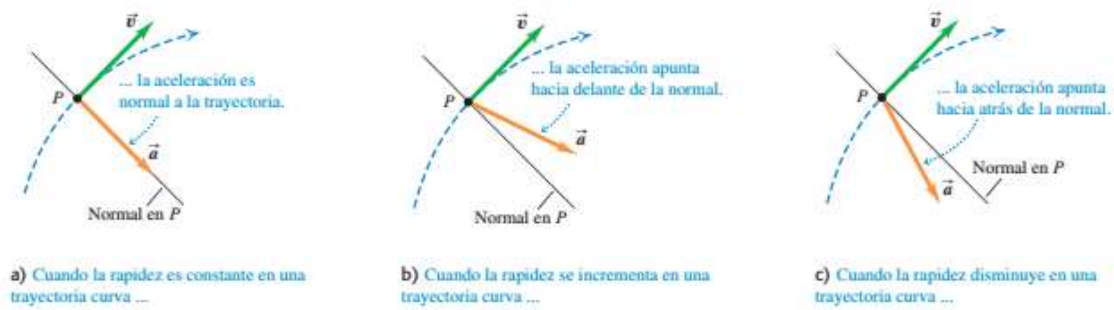


Figura 7. Vectores velocidad y aceleración para una partícula que pasa por un punto P en una trayectoria curva con rapidez a) constante, b) creciente y c) decreciente.

Ejercicio: Un móvil se mueve sobre una trayectoria tal que sus componentes del vector posición con respecto al origen de coordenadas estan dados en función del tiempo por:

$$x = -t^2 + 12\,t + 5$$
$$y = -2\,t^2 + 16\,t + 10$$

Donde el tiempo viene dado en segundos y la posición en metros. Encuentre:

a) Encuentre el vector posición de la partícula como función del tiempo, y determine su magnitud y dirección para t= 6 s.
b) Encuentre el vector velocidad de la partícula como función del tiempo, y determine su magnitud y dirección para t= 6 s.

c) Encuentre el vector aceleración de la partícula como función del tiempo, y determine su magnitud y dirección para t= 6 s

Solución:

a) el vector posición de una partícula viene dado por la expresión:

$$\vec{r} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} = (-t^2 + 12t + 5)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (-2t^2 + 16t + 10)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Para t = 6s nos queda,

$$\vec{\boldsymbol{r}} = 41\hat{\boldsymbol{\imath}} + 34\hat{\boldsymbol{\jmath}} \text{ m}$$

La magnitud se determina por la siguiente ecuación

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(41)^2 + (34)^2} = 53{,}26\, m$$

Y la dirección es

$$\tan\left(\frac{34}{41}\right) = \tan 0{,}83 = 39{,}7°$$

b) El vector velocidad viene dado por la derivada con respecto a t de $\vec{\boldsymbol{r}}$ entonces

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = (-2t + 12)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (-4t + 16)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Para t= 6s nos queda,

$$\boldsymbol{v} = 0\hat{\boldsymbol{\imath}} - 8\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

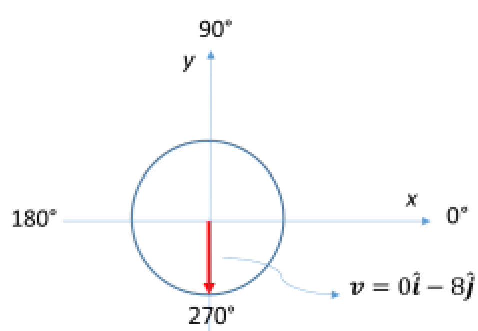
Su magnitud es

$$|\vec{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 8m/s$$

Y su dirección

$$\tan\left(\frac{-8}{0}\right) = \tan\infty = ?$$

No podemos obtener de la expresión trigonométrica el valor de la dirección; sin embargo sabemos que la velocidad sólo tiene componente en el eje de las y, así que θ es igual a 270°, como se muestra en la figura



c) La aceleración es la derivada de la velocidad en el tiempo, así que,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\vec{a} = \frac{d(-2t+12)}{dt}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{d(-4t+16)}{dt}\hat{\jmath} = -2\hat{\boldsymbol{\imath}} - 4\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

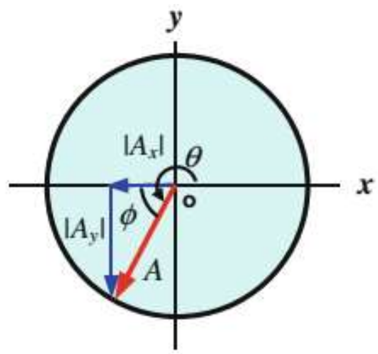
Para t= 6s nos queda,

$$\vec{a} = -2\hat{\boldsymbol{\imath}} - 4\hat{\boldsymbol{\jmath}} = constante$$

Su módulo es,

$$|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 4{,}47\ m/s$$

Y su dirección debemos determinarla considerando el cuadrante donde se encuentra el vector, ya que medimos el ángulo tomando el sentido contra reloj desde el eje positivo de las x. En nuestro caso el vector aceleración se encuentran en el tercer cuadrante, así que la dirección θ vendrá dada por la siguiente expresión:



$$\theta = 180° + \tan^{-1}\phi$$

$$\theta = 180° + \tan^{-1}\frac{|-4|}{|-2|} = 180° + 63{,}4° = 243{,}4°$$

En la tabla1 se muestran las relaciones para la determinación de la dirección de vectores en cada cuadrante

Tabla 1: Relación para la determinación de la dirección de un vector en función del cuadrante en el que se encuentre

Signo de $\vec{A}_x$	Signo de $\vec{A}_y$	Cuadrante	Ángulo
+	+	I	$\theta = \varphi$
-	+	II	$\theta = 180° - \varphi$
-	-	III	$\theta = 180° + \varphi$
+	-	IV	$\theta = 360° - \varphi$

Movimiento de proyectiles:

Cualquier objeto lanzado al espacio se considera un proyectil, estudiaremos el movimiento de estos cuerpos, estableciendo dos suposiciones iniciales cerca de la superficie terrestre:

1. La aceleración de la gravedad es constante
2. Los efectos de la resistencia del aire, la curvatura y de la rotación de la Tierra, son despreciables

Basado en estas suposiciones, encontramos que:

1. El movimiento de un proyectil se puede analizar como si fueran dos movimientos independientes, uno en el eje x, y otro en el eje y.
2. La trayectoria dibujada en el plano por un proyectil es parabólica

Escogeremos los ejes del plano x-y de tal forma que el eje y apunte verticalmente hacia arriba, el vector aceleración tendrá los siguientes valores para sus componentes:

$$\vec{a}_x = 0 \;\; y\, \vec{a}_y = -g$$

Así que podemos analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante (MRU) y movimiento vertical con aceleración constante (MUV). Asumiremos ademásque el tiempo inicial t_0=0, y que todo proyectil sale de un origen, $x_0 = y_0 = 0$, es decir el punto de salido $(x_0,y_0) = (0,0)$.

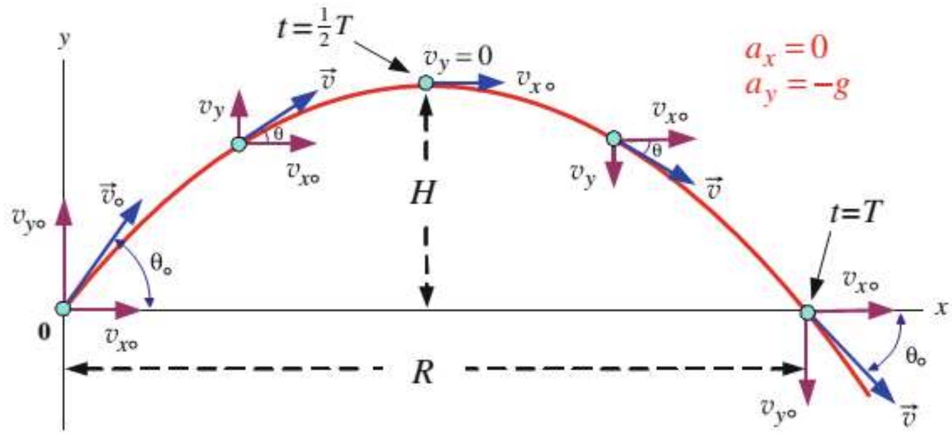


Figura 8.Trayectoria de un proyectil lanzado con una velocidad $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}}$ y ángulo θ con el eje x

Movimiento de proyectil en el eje x

En el eje x $\vec{a}_x = 0 \;\; y \;\; \vec{v}_x = constante$, tenemos entonces un movimiento rectilíneo uniforme, así que, las ecuaciones a utilizar serán:

$$v_x = |\vec{v}_o| \cos\theta \qquad (6)$$

$$x = v_x t = |\vec{v}_o| \cos\theta\, t \qquad (7)$$

Movimiento de proyectil en el eje y

En el eje y $\vec{a}_y = -g$, tenemos entonces un movimiento uniformemente variado, así que las ecuaciones a utilizar serán:

$$v_y = v_{y0} - gt = |\vec{v}_o| \sin\theta - gt \qquad (8)$$

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = (|\vec{v}_o|\, sin\,\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (9)$$

$$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2gy = (|\vec{v}_o|\, sin\,\theta)^2 - 2gy \qquad (10)$$

Alcance horizontal de un proyectil:

El alcance R, es la distancia horizontal que recorre el proyectil después de transcurrido el tiempo para retornar a la altura y_0 del cual partió, a este tiempo se le conoce como tiempo de vuelo, y lo denotaremos como T. entonces

$$x = R = |\vec{v}_o|\, cos\,\theta\, T$$

$$y = y_0 = (|\vec{v}_o|\, sin\,\theta)T - \frac{1}{2}gT^2 = 0$$

Resolvemos esta última ecuación para T, y sustituimos en la ecuación para el alcance y obtenemos que,

$$T = 2(|\vec{v}_o|\, sin\,\theta)/g$$

$$R = |\vec{v}_o|\, cos\,\theta\, T = |\vec{v}_o|\, cos\,\theta \cdot\ 2(|\vec{v}_o|\, sin\,\theta)/g$$

$$R = \frac{|\vec{v}_o|^2(2\cos\theta\sin\theta)}{g} = \frac{|\vec{v}_o|^2}{g}\sin 2\theta$$

Este resultado nos indica que el alcance es máximo cuando el $\sin 2\theta = 1$, esto ocurre cuando $\theta = 45°$

Altura máxima de un proyectil:

En el punto más alto, la velocidad vertical es cero. Denotemos ese instante de tiempo como en t_1; entonces, despejemos para el tiempo la ecuación (8), observemos que el resultado es

$$t = \frac{|\vec{v}_o|\sin\theta}{g}$$

Sustituimos en (9) y despejamos y para obtener la altura máxima

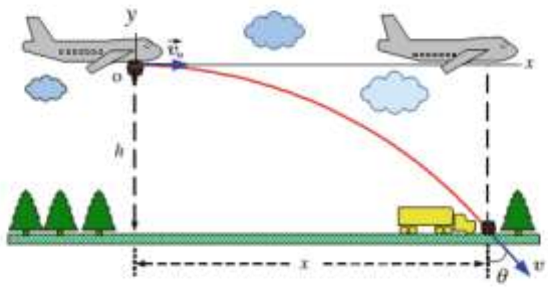
$$y = (|\vec{v}_o|\, sin\,\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{máx} = (|\vec{v}_o|\, sin\,\theta)\frac{|\vec{v}_o|\, sin\,\theta}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{|\vec{v}_o|\, sin\,\theta}{g}\right)^2$$

$$y_{máx} = H = \frac{|\vec{v}_o|^2\, sin^2\,\theta}{2g}$$

Ejercicio:
Un avión está volando horizontalmente con una velocidad constante v_0 = 400 km / h a una elevación constante h = 2 km sobre el suelo, vea la figura. Si el piloto decidió lanzar un paquete de suministros muy cerca de un camión en tierra, entonces,

1. ¿cuál es el tiempo del vuelo del paquete?
2. ¿Cuál es la distancia horizontal cubierta por el paquete en ese tiempo (que es la misma distancia horizontal cubierta por el avión)?



Solución:

1. La velocidad inicial v_{y0} del paquete es cero, así que su velocidad inicial sólo tiene componente en el eje de las x, entonces su movimiento en el eje de las y se puede considerar como un problema de caída libre. Usemos la ecuaci. (9) para determinar el tiempo de vuelo, y considerando el sistema de coordenada en la figura tenemos,

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{2h}{g} = -t^2 = \frac{-4000m}{9,8m/s^2}$$

$$t = \sqrt{\frac{4000m}{9,8m/s^2}} = 20,2s$$

2. La distancia horizontal cubierta en ese tiempo es,

$$x = v_x t = |\vec{v}_o| \cos\theta\, t = \left(400\,\frac{km}{h}\right) \times \frac{h}{3600\ s} \times \frac{10^3 m}{km} = 2.244\ m = 2,244\ km$$

Movimiento circular uniforme:

Una partícula que se mueve alrededor de un círculo con rapidez constante, $|\vec{v}| =$ constante, se dice que experimenta un movimiento circular uniforme. Estudiemos este movimiento considerando un automóvil que da vuelta en una curva de radio constante con rapidez constante, allí observamos, que no hay componente de aceleración tangente a la trayectoria; si la hubiera, la rapidez cambiaría. El vector aceleración es perpendicular a la trayectoria y, por lo tanto, se dirige hacia al centro de la trayectoria circular. Ver figura 9.

Figura 9. Automóvil con movimiento circular uniforme, la rapidez es constante y la aceleración se dirige hacia el centro de la trayectoria circular

Ya sabemos que la aceleración para un movimiento circular uniforme está dirigida hacia el centro de la trayectoria, ahora debemos obtener una relación sencilla para su magnitud. En la figura 10 se muestra una partícula que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular de radio R con centro en O, la partícula se mueve de P a Q en un tiempo Δt. Se detalla en la figura el cambio de dirección de la velocidad $\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$, y que la variación angular en ambas figuras es idéntica, ya que la velocidad siempre es perpendicular al radio, así que ambos triángulos son semejantes, esto nos permite escribir la siguiente relación:

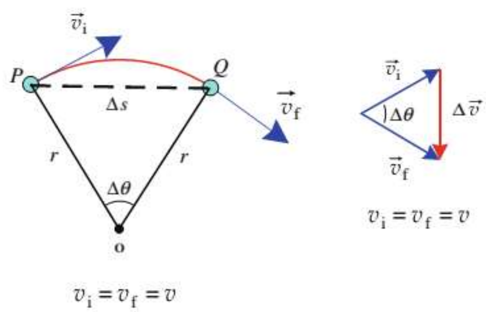


Figura 10. Representación del cambio de dirección de la velocidad de una partícula con movimiento circular uniforme

$$\frac{\Delta\vec{v}}{v} = \frac{\Delta s}{r},$$

Que nos permite obtener una relación para determinar la magnitud de la aceleración en un movimiento circular uniforme, al sustituir $\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$ en la ecuación para velocidad media, así tenemos que,

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \frac{|\Delta\vec{\boldsymbol{v}}|}{\Delta t} = \frac{v\Delta s}{r\Delta t}$$

Cuando el intervalo de tiempo se hace muy pequeño, es decir, Δt tiende a cero, en ese límite $\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$ apunta hacia el centro de la trayectoria circular, y por lo tanto la aceleración apuntará en la misma dirección, en consecuencia. En consecuencia, en este límite el arco PQ = rΔ θ será igual a Δs y la relación Δs /Δ t se aproxima al módulo de la velocidad v. Por lo tanto, cuando t → 0, La magnitud de la aceleración radial será:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\Delta s}{r\Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} \text{ (Aceleración radial o centrípeta)} \qquad (11)$$

Podemos expresar la velocidad de una partícula en un movimiento circular con relación al período T, que no es más que el tiempo que tardea la partícula en dar una revolución completa,

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

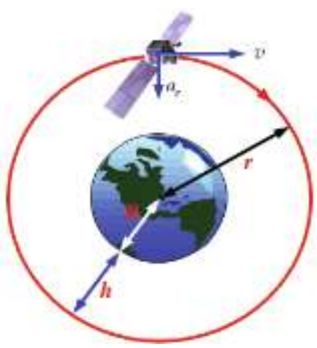
Así que la aceleración radial será,

$$a_r = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T} = \frac{v^2}{r} \qquad (12)$$

Ejercicio:

Un satélite está circulando alrededor de la tierra a una altitud h = 150 km por encima de su superficie, donde la aceleración en caída libre es, g = 9,4 m/s^2. El radio de la tierra es 6,4 x10^6 m. ¿Cuál es el módulo de la velocidad (rapidez) y el período del satélite?

Solución: Hagamos una representación del problema, entonces el radio es igual a,



$$r = R + h$$

Para determinar el módulo de la velocidad usaremos la expresión para la aceleración radial

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Para el movimiento circular uniforme, la aceleración radial es igual a la aceleración de la gravedad, en caída libre a esa altitud a_r = g, así que, sustituyendo en la ecuación anterior tenemos,

$$\text{g} = \frac{v^2}{R + h}$$

Despejando v, tenemos que,

$$v = \sqrt{(R+h)\text{g}} = \sqrt{(6{,}4 \times 10^6 m + 150 \times 10^3 m) \cdot 9{,}4 m/s^2} = 7.847 m/s$$

Y su periodo,

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6{,}4 \times 10^6 m + 150 \times 10^3 m)}{7.847 m/s} = 5.245 s = 1{,}46 h$$

Movimiento circular no uniforme

Consideraremos ahora que la velocidad en un movimiento circular no es constante, se dice entonces que tenemos un movimiento circular no uniforme. En este caso la aceleración viene determinada por los cambios tanto en dirección como en magnitud de la velocidad.

$$\vec{\boldsymbol{a}} = a_t + a_r$$

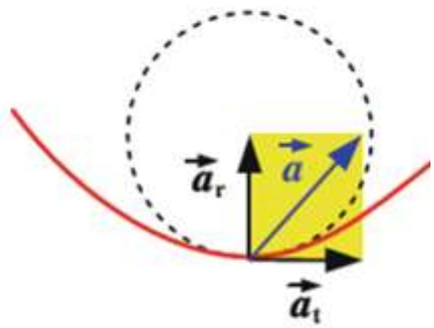


Figura 11. Representación gráfica de la componente radial y tangencial de la aceleración de una partícula en un movimiento circula no uniforme

La componente radial de la aceleración $a_r = \frac{v^2}{r}$, siempre es perpendicular a la velocidad instantánea y dirigida al centro del círculo. Sin embargo, como el módulo de la velocidad cambia su valor no es constante. El valor de la velocidad tangencial viene dado por la expresión

$$a_t = \frac{d|\vec{\boldsymbol{v}}|}{dt}$$

Ya que a_t y a_r, son perpendiculares, el vector $\vec{\boldsymbol{a}}$, su dirección y su magnitud respecto al radio de curvatura vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = a_t + a_r \qquad \tan\theta = \frac{a_t}{a_r} \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$