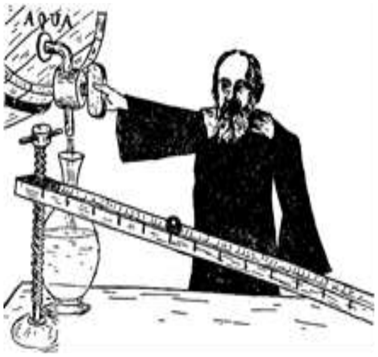
Cinemática



Galileo Galilei

Introducción

La mecánica es la rama de la física que estudia el movimiento de los cuerpos; esa apreciación de cambio de lugar que tenemos de las cosas, y que ha tratado de ser explicada desde tiempos ancestrales. Hubo un concepción propuesta por Aristóteles basada fundamentalmente en el sentido común, plausible y razonable, pero errada, y que se mantuvo durante dos mil años, hasta que Galileo y Newton entre los siglos XVI y XVII presentaron planteamientos más racionales, que permitieron establecer las bases de lo que hoy conocemos como la mecánica.

En esta parte del estudio que haremos de la mecánica, enfocaremos nuestro interés en el movimiento de un cuerpo ignorando la causa que lo produce, es decir, estudiaremos la cinemática de los cuerpos. Sabemos que el movimiento se realiza al transcurrir el tiempo, así que, sin la dimensión temporal prácticamente es imposible describir el movimiento. Pero tampoco es posible si no tenemos un punto de referencia con respecto al cual observamos el movimiento del objeto de nuestro interés, el estado de movimiento o de reposo de un cuerpo se puede definir con precisión, solamente si se indica con respecto a que se mueve; esto pone de manifiesto el carácter relativo del movimiento

Nuestra percepción del mundo es tridimensional, así que, definiremos los parámetros cinemático para un sistema tridimensional y luego iniciaremos el estudio de la cinemática considerando el movimiento en una dimensión, posteriormente ampliaremos la discusión a dos y tres dimensiones. Consideraremos además, a todo sistema físico como una partícula, definiendo ésta como un punto material dentro de la cual se concentra toda la masa del cuerpo que representa. Esta consideración restringirá el movimiento a traslaciones en el espacio y nos permitirá de manera más sencilla entender los conceptos fundamentales de los parámetros cinemáticos.

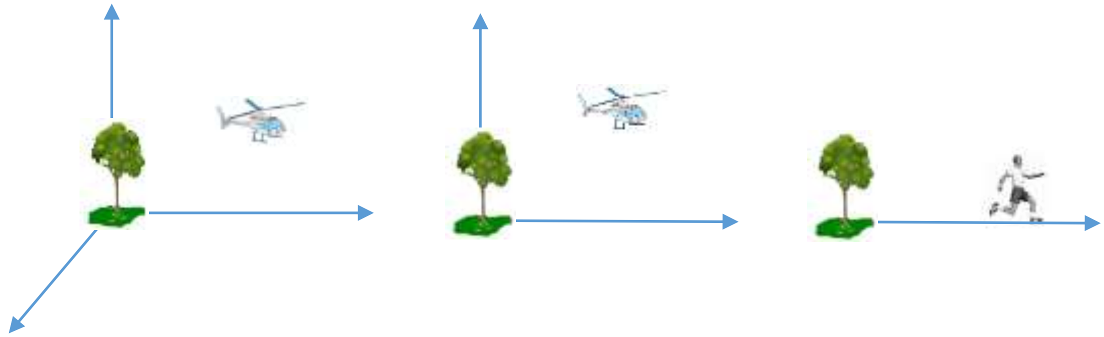


Figura 1. Punto de referencia, considerando un triedro, un plano y un eje para el estudio cinemático de un cuerpo.

Definición de parámetros cinemáticos

Vector Posición: se define como el vector trazado desde el origen escogido como punto de referencia, hasta el punto que representa al objeto en estudio. Ver figura 2.

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\widehat{\boldsymbol{k}} \quad [\mathrm{L}]$$

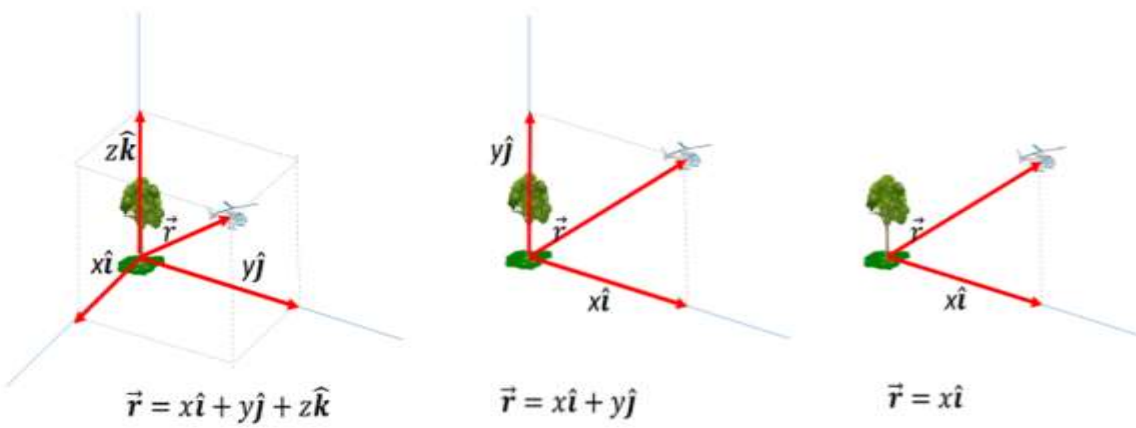


Figura 2. Vector posición de un cuerpo en un sistema de referencia tridimensional bidimensional y unidimensional

Vector Desplazamiento:

Un punto al moverse describe una trayectoria en el espacio, ella comprende dos magnitudes cinemáticas, el desplazamiento y el camino recorrido o longitud de la trayectoria. El vector *desplazamiento* de una partícula, es el cambio de posición que sufre el vector posición de esa partícula al trascurrir el tiempo. Si para un tiempo inicial $t_{i,}$ la posición de una partícula está dada por el vector $\boldsymbol{r_i}$**,** y luego para un tiempo final t_f, es $\boldsymbol{r_f}$, entonces el desplazamiento viene dado por la expresión, que no es más que la cuerda secante a la trayectoria entre la posición inicial y final.

$$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{r_f}} - \overrightarrow{\boldsymbol{r_\imath}} \quad [L]$$

Longitud de trayectoria o camino recorrido es igual a la distancia que recorre la partícula a lo largo de la trayectoria de su movimiento.

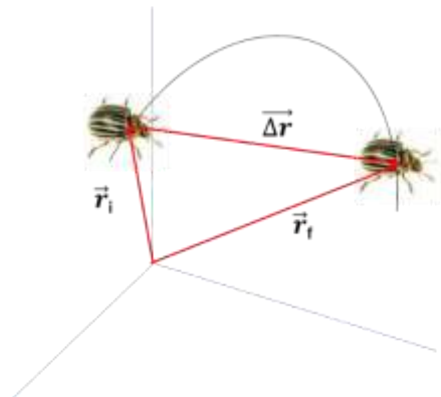


Figura 3. Representación del cambio de posición $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$ de un cuerpo físico

Vector Velocidad media: Se define como la razón o cociente entre el deslazamiento $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$ en el intervalo de tiempo Δt que transcurre durante ese desplazamiento, de esto podemos concluir que el vector velocidad media está orientado según $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$, es decir, según la cuerda secante a la trayectoria en los puntos inicial y final del desplazamiento, y su valor viene dado por la pendiente de esa segmento de recta secante a la trayectoria

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{r_f} - \overrightarrow{r_i}}{t_f - t_i} \qquad \left[\frac{L}{T}\right]$$

Rapidez media: es el cociente de la longitud de la trayectoria o camino recorrido entre el intervalo de tiempo que tarda en recorrerla, es evidentemente un escalar y se indica con el símbolo $\bar{v}$**.** *Es importante no confundir este término con el de rapidez, que es el módulo de la velocidad*

Velocidad Instantánea*:* se define la velocidad instantánea como el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero, $(\Delta t \to 0)$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \overline{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Esto expresa la reducción del intervalo de tiempo al ir desde Q a P. ver figura 4. Se observa en ella que al ir de Q a P, la cuerda $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$ tiende a la tangente a la curva en P. Así que la velocidad instantánea es igual a la pendiente de la línea tangente en el punto de interés.

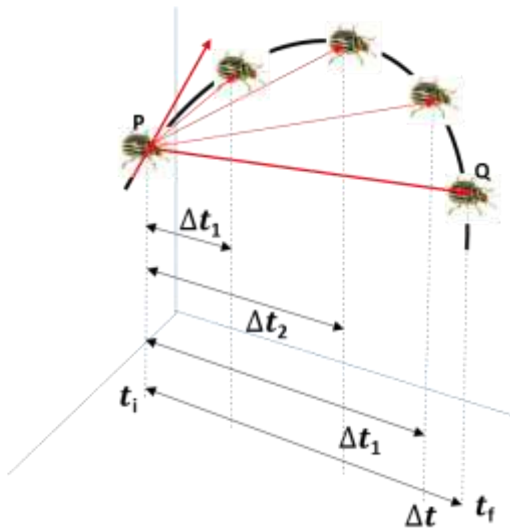


Figura 4. Representación de la tendencia de la cuerda $\Delta\vec{r}$ a la tangente de la curva en P al disminuir Δt

Aceleración media: se define como la razón de cambio de la velocidad con respecto al intervalo de tiempo en el cual se produce dicho cambio

$$\bar{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v_f} - \vec{v_i}}{t_f - t_i} \qquad \left[\frac{L}{T^2}\right]$$

Aceleración Instantánea: se define la aceleración instantánea como el límite cuando Δt tiende a cero, $(\Delta t \rightarrow 0)$ para la aceleración media

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

En resumen tenemos los siguientes vectores de la cinemática, que en el sistema de coordenadas cartesianas son:

1. $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ Posición
2. $\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}$ Deslazamiento
3. $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_x\hat{k}$ Velocidad
4. $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ Aceleración

Movimiento en una dimensión

Posición y desplazamiento: Para asimilar mejor los conceptos cinemáticos restringiremos el análisis a una dimensión, es decir a una línea recta, bien sea vertical u horizontal, la cual en nuestro sistema de coordenadas cartesiano puede ser la recta orientada en cualquiera de las direcciones ***i, j, k***.

Para localizar un objeto en un espacio unidimensional debemos fijar un punto de referencia, y con respecto a ese punto fijar un eje con sentidos definidos y luego determinar en él la posición del objeto. En nuestro caso hemos elegido el eje de las x, como se muestra en la figura 5. Su vector posición viene expresado por,

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

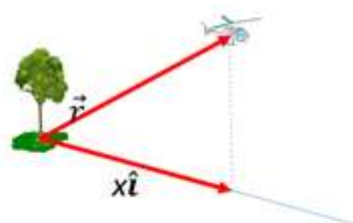


Figura 5. Posición de un cuerpo determinado sobre el eje de las x en el sistema de referencia cartesiano

y el vector desplazamiento por,

$$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \Delta x\hat{\boldsymbol{\imath}} = x_f - x_i$$

Su magnitud o módulo es la distancia entre la posición inicial y final, y su dirección la definimos al tomar la recta horizontal o vertical y el sentido nos lo dan los signos más y menos que representan el movimiento a la derecha e izquierda respectivamente.

Velocidad media y rapidez media: consideremos una partícula moviéndose para un tiempo inicial t_i, en el eje x, desde un punto inicial P, a un punto final Q, al cual llega en un tiempo t_f, es decir, que para un intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, la partícula tiene un desplazamiento $\Delta x = x_f - x_i$. Ver figura 6.

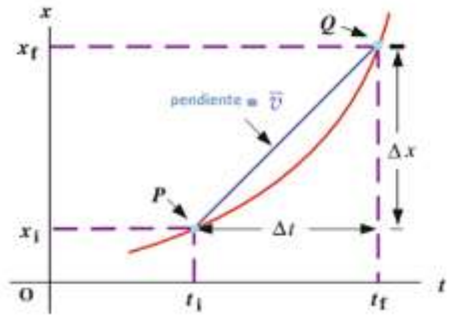


Figura 6. Gráfica posición en función del tiempo para el movimiento de una partícula a lo largo del eje de las x.

Velocidad media: La velocidad media se define como el cociente de su desplazamiento Δx, entre el intervalo de tiempo Δt. Es decir,

$$\overline{\boldsymbol{v}_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \quad \left[\frac{L}{T}\right] \quad \frac{m}{s}$$

De la figura podemos precisar que la magnitud de la velocidad media es igual a la pendiente de la recta secante a la trayectoria de la partícula.

Rapidez media: es el cociente de la distancia total recorrida entre el intervalo de tiempo que tarda en recorrerla, es un escalar y siempre es positiva

$$v = \frac{\text{distancia total recorrida}}{\Delta t}$$

Velocidad instantánea: La velocidad en cualquier instante se obtiene de la velocidad media, haciendo que el intervalo de tiempo tienda a cero, esto se expresa como,

$$\boldsymbol{v}_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

La velocidad instantánea es igual a la pendiente de la línea tangente a la curva en el punto de interés y puede ser positiva, negativa o igual a cero

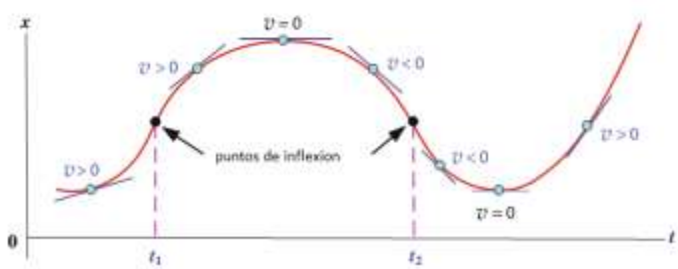


Figura 7. Gráfica posición en función del tiempo, en ella se muestra las velocidades positivas, donde la pendiente de la línea tangente es positiva; las velocidades negativas, la pendiente de la línea tangente es negativa; y velocidad igual a cero donde la pendiente es cero.

Aceleración: cuando la velocidad de una partícula en el tiempo sufre cambios, se dice que está acelerada. Consideremos el movimiento de una partícula a lo largo del eje x, si la velocidad para un tiempo t_i es v_i y una velocidad diferente v_f para un tiempo t_f, como se muestra en la figura 8, entonces definimos la aceleración media como la pendiente de la secante.

$$\overline{\boldsymbol{a_x}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \qquad \left[\frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{T}^2}\right] \ \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}^2}$$

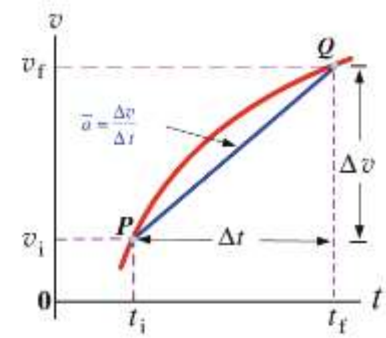


Figura 8. Gráfico velocidad-tiempo para un objeto que se mueve en una línea recta, la pendiente de la recta PQ, se define como la aceleración media en el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$

Aceleración instantánea: se define como el límite de la aceleración media, cuando Δt se aproxima a cero

$$\boldsymbol{a_x} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\boldsymbol{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$$

En resumen tenemos las siguientes ecuaciones:

1. $\Delta \boldsymbol{x} = x_f - x_i$
2. $\overline{\boldsymbol{v}_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
3. $\boldsymbol{v}_x = \frac{dx}{dt}$
4. $\overline{\boldsymbol{a_x}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$
5. $\boldsymbol{a_x} = \frac{dv_x}{dt}$

Movimiento rectilíneo con aceleración constante

Si la aceleración es constante la aceleración media es igual a la aceleración instantánea, y podemos reemplazamos $\overline{\boldsymbol{a}_x}$ por $\boldsymbol{a}_x$, y tomando t_i igual a cero**,** la ecuación para aceleración en un movimiento rectilíneo nos queda como,

$$\boldsymbol{a}_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - 0}$$

Despejando para la velocidad final tenemos,

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \qquad (1)$$

Esta ecuación nos permite determinar la velocidad en cualquier instante; además cuando la aceleración es constante la velocidad varía como una función lineal en el tiempo, de acuerdo con la ecuación (2), así que podemos expresar la velocidad media como la media aritmética de las velocidades inicial y final, la ecuación 3, sólo aplica cuando la aceleración es constante.

$$\overline{v_x} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{\mathbf{2}} \qquad (2)$$

Sabemos que $\Delta\boldsymbol{x} = x_f - x_i$ y que $\overline{\boldsymbol{v}_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, con estas dos ecuaciones y la ecuación (2) obtenemos una ecuación para la posición de la partícula en función del tiempo.

$$\frac{x_f - x_i}{t} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2}$$

$$x_f - x_i = \frac{1}{2}\left(v_{xi} + v_{xf}\right)t \qquad (3)$$

Esta ecuación nos permite determinar la posición para cualquier tiempo conociendo la velocidad inicial y la final de la partícula. Por último utilizando la ecuación (1) y sustituyéndola en la ecuación (3)

$$x_f - x_i = \frac{1}{2}[v_{xi} + (v_{xi} + a_x t)]t$$

$$= \frac{1}{2}[v_{xi}t + v_{xi}t + a_x t^2]$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad (4)$$

Con esta ecuación podemos determinar la posición de la partícula en cualquier instante de tiempo. Finalmente despejemos *t* de la ecuación (1) y sustituyamos en la ecuación (3) ecuación independiente del tiempo, que nos permitirá obtener el valor de la velocidad final

$$x_f - x_i = \frac{1}{2}\left(v_{xi} + v_{xf}\right)\left(\frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}\right)$$

$$x_f - x_i = \left(\frac{{v_{xf}}^2 - {v_{xi}}^2}{2a_x}\right)$$

$${v_{xf}}^2 = {v_{xi}}^2 + 2a_x\left(x_f - x_i\right) \qquad (5)$$

Esta última ecuación nos permite determinar la velocidad final en función de la aceleración y el desplazamiento de la partícula. Estas son las cinco ecuaciones cinemáticas con las que analizaremos cualquier movimiento con aceleración constante.

Para un valor de $\boldsymbol{a}$ igual a cero, la velocidad es constante $v_{xf} = v_{xi} = v_x$, y vemos que la posición cambia linealmente con el tiempo. Este movimiento se conoce como Movimiento rectilíneo uniforme.

$$x_f = x_i + v_{xi}t$$