Física I

Clase 03. Cantidades físicas - Escalares y Vectores

Hasta ahora hemos hablado del proceso de medición y de ciertas característica de este proceso como lo son: la medición directa o indirecta, el tipo de cantidades, fundamentales o derivadas, de los patrones de medida, y de la incertidumbre que se comete al medir. Ahora nos enfocaremos en la clasificación que se hace de las cantidades físicas en función a su definición.

Las cantidades que se describen completamente con solo un número y una unidad de medida, se conocen como cantidades escalares; entre ellas tenemos: el tiempo, la temperatura, la masa y la densidad. La forma de operar con las cantidades escalares es la que hemos aprendido en nuestros estudios de álgebra y aritmética para los números reales.

Las cantidades que se originan en la física cuando a través del proceso de medición, no solo debemos asignar un número y una unidad de medida a lo que se mide, sino también dirección y sentido para definirlo completamente, se denominan cantidades vectoriales o vectores, así que un vector no es más que una cantidad que tiene módulo o magnitud, dirección y sentido; ejemplo de estas cantidades son: el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y la cantidad de movimiento. Estudiaremos las propiedades y el álgebra de esta herramienta matemática que estaremos usando continuamente en este curso.

Un vector se representa gráficamente por un segmento de recta orientado, tal como se muestra en la figura1; su magnitud la representa la longitud del segmento de recta, su dirección la recta que lo contiene y su sentido la orientación dada por la punta de flecha en uno de sus extremos. La notación que usaremos para los vectores serán letras con una flecha sobre ellas, $\vec{A}$ o letras en negritas $\boldsymbol{A}$. En la figura se presenta la representación gráfica de un vector y de las características que lo definen, es de hacer notar que los vectores tienen un significado físico independiente del sistema coordenado que se introduzca para representarlo

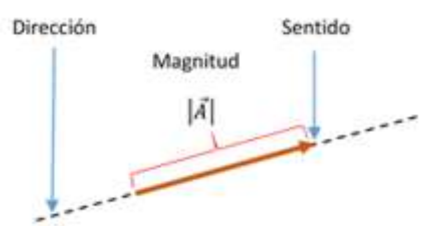

Figura 1. Representación gráfica en el espacio de un vector $\vec{A}$.

Propiedades y operaciones de los vectores

La representación geométrica de vectores en el espacio nos permite observar alguna propiedades de los vectores que presentamos a continuación:

1. *Vector unitario*: es un vector cuya magnitud es la unidad en la dirección del vector mayor $\vec{A}$; se simboliza con un signo circunflejo en la parte superior de la letra que lo representa, $\widehat{\boldsymbol{A}}$. Posteriormente daremos una definición analítica de este vector

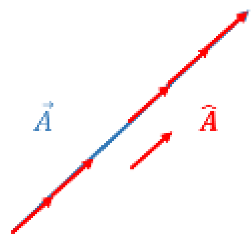

Figura 2. Representación en el espacio de un vector unitario

2. *Vector opuesto*: Un vector que solo tenga sentido contrario a otro vector dado $\vec{A}$, pero con la misma magnitud y dirección es su vector opuesto, se denota como $-\vec{A}$.
3. *Igualdad de vectores*: Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son iguales si tienen la misma magnitud, dirección y sentido, sin que importe su punto inicial.

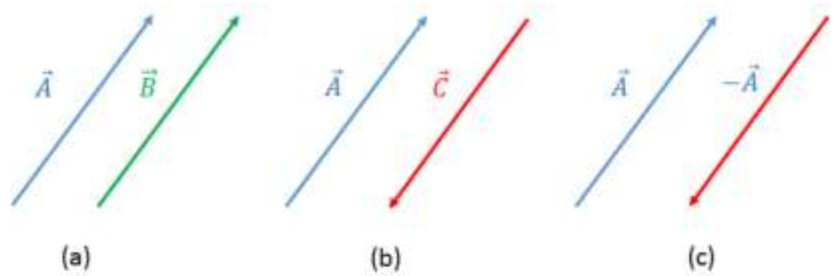

Figura 3. Representación en el espacio de vectores a) iguales b) y c) vectores opuestos

4. *Suma de vectores por métodos gráficos*

   Método del paralelogramo: se usa solo para sumar dos vectores, consiste en unirlos por sus orígenes, así forman dos lados adyacentes de un paralelogramo. Los otros dos lados del paralelogramo se construyen trazando líneas paralelas a estos lados. La suma de vectores resultante se representa mediante la diagonal del paralelogramo, a partir del origen de los dos vectores.

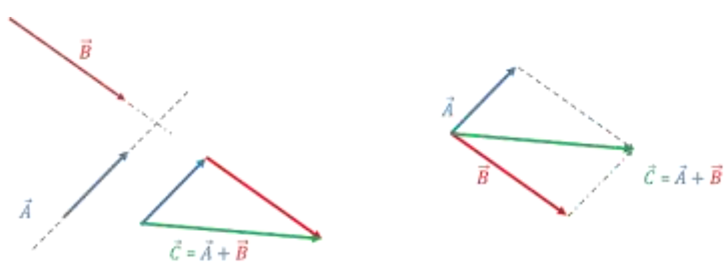

Figura 4. Suma geométrica de vectores en el espacio, método del paralelogramo

Método del polígono (o de punta a cola). Se define por la construcción geométrica que se produce al trasladar los vectores que se quieren sumar, colocando la cola de uno de estos en la punta de otro

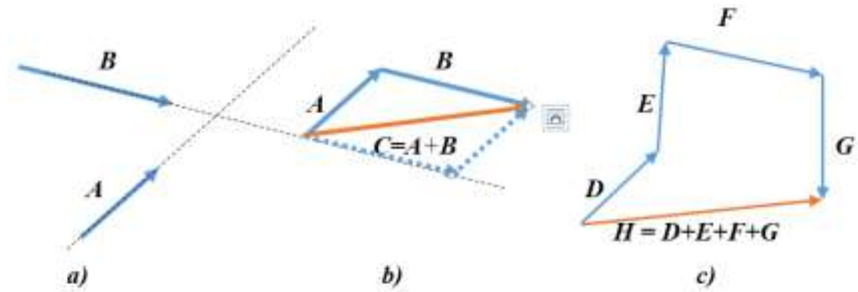

Figura 5. Suma geométrica de vectores en el espacio, método del polígono

5. La diferencia de los vectores $\vec{A}$ *y* $\vec{B}$ se denota con $\vec{A} - \vec{B}$, es aquel vector $\vec{C}$ que al ser sumado a $\vec{B}$ da como resultado el vector $\vec{A}$.

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

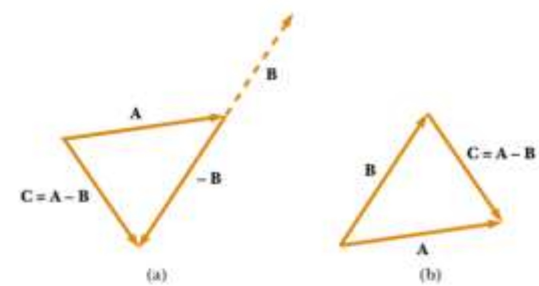

Figura 6. Representación geométrica de la resta de vectores en el espacio

6. *Multiplicación por un escalar*. La multiplicación de un vector $\vec{A}$ por un escalar m produce un vector $m\vec{A}$ con magnitud m veces la magnitud de $\vec{A}$**,** y su dirección es la en la misma de $\vec{A}$ o es opuesta a ella, según sea m positivo o negativo. Si $m = 0$, entonces $m\boldsymbol{A} = 0$, que es el vector nulo.

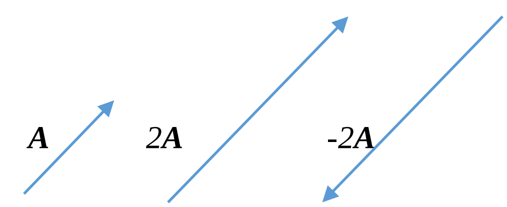

Figura 7. Representación del producto de un vector ***A*** por un escalar *m=2 y m= -2*

Leyes algebráicas de las operaciones , suma, resta y multiplicación por un escalar

1. $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ Ley asociativa para la suma
2. Existe un vector cero, $\boldsymbol{0}$, tal que para todo vector $\vec{A}$, Elemento cero

   $\vec{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \vec{A} = \vec{A}$

3. Para todo vector $\vec{A}$, existe un vector $-\vec{A}$ tal que Existencia de los negativos

   $\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = \boldsymbol{0}$

4. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ Ley conmutativa para la suma
5. $m(\vec{A} + \vec{B}) = m\,\vec{A} + m\,\vec{B}$ Ley distributiva
6. $(m + n)\,\vec{A} = m\,\vec{A} + n\,\vec{A}$ Ley distributiva
7. $m(n\,\boldsymbol{A}) = (m\,n)\boldsymbol{A}$ Ley asociativa
8. $1(\vec{A}) = \vec{A}$ Multiplicación por la unidad

7. *Producto de vectores*

Existen dos productos entre vectores, uno es el producto escalar (punto o interno) y el otro el proeducto vectorial (cruz o externo). Revisemos sus características y propiedades.

Producto escalar de vectores. Se define el producto escalar de dos vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$, al número que se obtiene al multiplicar el módulo de ambos vectores por el coseno del ángulo entre ellos. Este producto es un número y analiticamente se representa como:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta$$

De esta definición vemos que si $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ y si el módulo de los vectores es nulo, es decir, $A \neq 0\ y\ B \neq 0$, Entonces el vector $\vec{A}$ es perpendicular al vector $\vec{B}$. Además que el coseno del ángulo θ entre los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, es igual al producto escalar de sus vectores unitarios

$$\widehat{\boldsymbol{A}} \cdot \widehat{\boldsymbol{B}} = \cos\theta$$

Geométricamente el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$, es igual al producto del módulo de la proyección del vector $\vec{B}$ en la dirección de $\vec{A}$, por su módulo y viceversa.

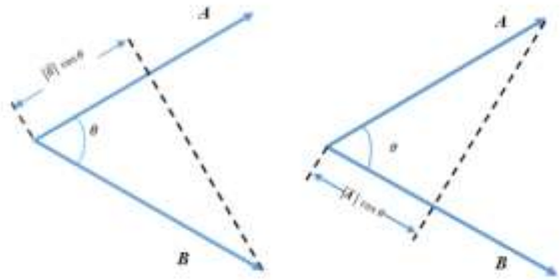

Figura 5. Representación de la proyección de $\boldsymbol{B}$ sobre $\boldsymbol{A}$ y la de $\boldsymbol{A}$ sobre $\boldsymbol{B}$

Leyes algebráicas del producto escalar de vectores

Sean $\vec{\boldsymbol{A}}$, $\vec{\boldsymbol{B}}$ y $\vec{\boldsymbol{C}}$, vectores y m un escalar. Entonces se cumplen las siguientes leyes:

1. $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}$ Ley conmutativa del producto punto
2. $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot (\vec{\boldsymbol{B}} + \vec{\boldsymbol{C}}) = (\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}) + (\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{C}})$ Ley distributiva
3. $m(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}) = (m\vec{\boldsymbol{A}}) \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{A}} \cdot (m\vec{\boldsymbol{B}}) = (\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})m$
4. $\left.\begin{array}{l}(\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}) = 1 \\ (\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{j} \cdot k) = (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i}) = 0\end{array}\right\}$ Propiedades de los vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesiano
5. *Si* $(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}) = 0$ *y* $\vec{\boldsymbol{A}}$ *y* $\vec{\boldsymbol{B}}$ *no son vectores nulos, entonces* $\vec{\boldsymbol{A}}$ *y* $\vec{\boldsymbol{B}}$ *son perpendiculares.*
6. *Dados* $\vec{\boldsymbol{A}} = A_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{i} + A_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{j} + A_{\boldsymbol{z}}\boldsymbol{k}$ *y* $\vec{\boldsymbol{B}} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$ *Entonces*

$$\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = A_{\boldsymbol{x}}B_x + A_{\boldsymbol{y}}B_y + A_{\boldsymbol{z}}\, B_z$$

Producto vectorial de dos vectores. Se define el producto vectorial o producto cruz de dos vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$, al vector normal al plano que contiene a ambos vectores, y cuyo módulo es igual al producto $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin\theta,$ y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha

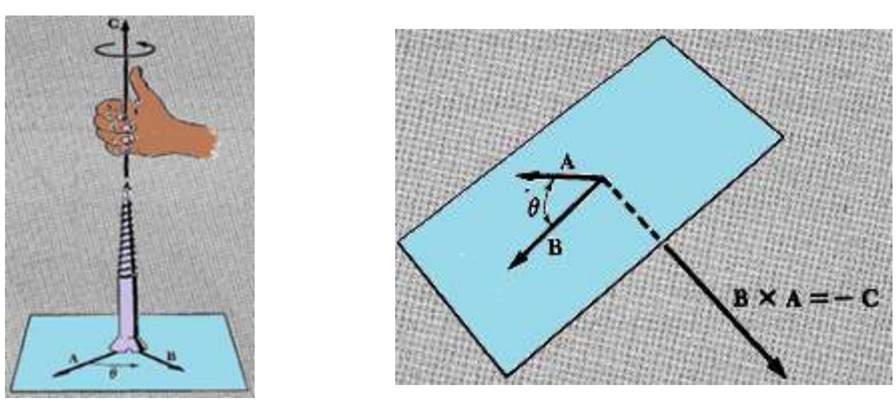

Figura 6. Representación del producto cruz vectorial $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{C}}$

Leyes algebráicas del producto vectorial

Sean $\vec{A}$**,** $\vec{B}$ *y* $\vec{C}$ vectores y m es un escalar. Entonces se cumplen las siguientes leyes:

1. $(\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{B} \times \vec{A})$ — No se cumple la ley conmutativa
2. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ — Ley distributiva
3. $m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B})$
4. $(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0}$
5. $(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{k}, (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i}, (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{j}$

   $\left.\right\}$ *Propiedades de los vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesiano*
6. **Si** $(\vec{A} \times \vec{B}) = \boldsymbol{0}$ **y** $\vec{A}$ **y** $\vec{B}$ no son vectores nulos, entonces $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos
7. *Dados* $\vec{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ *y* $\vec{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$ Entonces

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

Representación de vectores en un sistema de referencia cartesiano

Conocemos el sistema de coordenadas cartesianos de nuestros cursos de matemática, ahora lo utilizaremos para representar los vectores, y a través de él tendremos un método sencillo y general para las operaciones vectoriales,es de destacar que la operación división no está definida para vectores.

Definamos nuestro sistema cartesiano haciendo uso de tres vectores unitarios, $\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ *y* $\hat{\boldsymbol{k}}$, perpendiculares entre si, que apuntan en la dirección positiva de los ejes *x*, *y*, y *z* respectivamente.

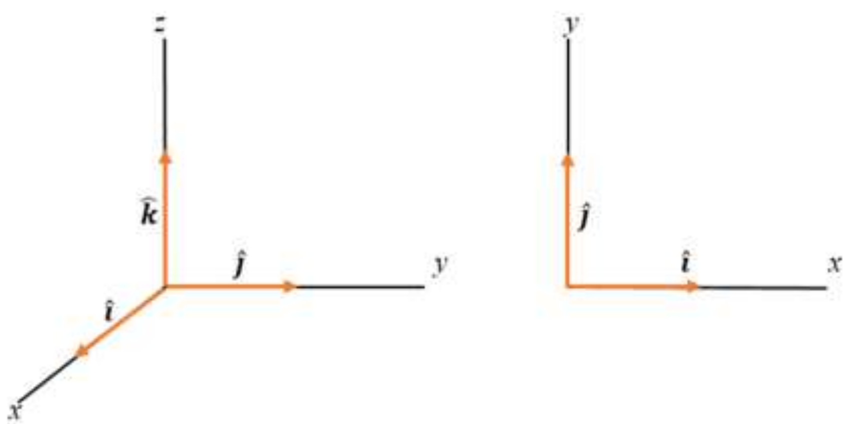

Figura 5. Sistema de coordenadas Cartesiano en el espacio tridimensional y bidimensional

En este sistema un vector $\vec{A}$ puede escribirse como:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

Donde A_x, A_y, A_z, son las componentes escalares del vector $\vec{A}$ en los ejes x, y, z, respectivamente. En la figura se muestra el vector y sus componentes proyectadas en el espacio

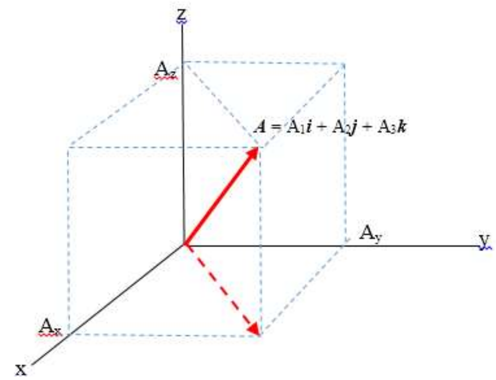

Figura 6. Representación del vector $\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}$, en un sistema de coordenadas rectangulares tridimensional

De la grafica podemos ver que en función de sus componentes la magnitud del vector ***A*** es es igual al cuadrado de los catetos del triangulo formado por el vector y sus proyecciones sobre los ejes.

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_k)^2}$$

Estudiemos el algebra de vectores dentro del sist. de coordenadas cartesiano en el plano. La representación en el plano cartesiano de un vector, viene dada por la expresión:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$

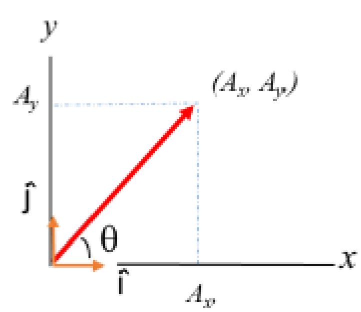

Figura 7. Representación del vector $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$ en un sistema bidimensional

De la figura y haciendo uso de la definición de seno y coseno, tenemos que los componentes del vector $\vec{\boldsymbol{A}}$ son: Las proyecciones del vector en cada eje de coordendas.

$$\boldsymbol{A_x\hat{\imath}} = A_x\, Cos\theta\, \hat{\imath}$$

$$\boldsymbol{A_y\hat{\jmath}} = A_y\, Sen\ \theta\, \hat{\jmath}$$

Asi tenemos que el vector $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_x i} + A_y \boldsymbol{j} = A_x \, Cos\theta \, \boldsymbol{i} + A_y \, Sen \, \theta \boldsymbol{j}$; en este caso la expresion para la magnitud es

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2},$$

y su dirección,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_x}$$

Suma con vectores unitarios

Dados dos desplazamientos

$$\overrightarrow{\boldsymbol{D}} = (6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}) \, m \quad y \quad \vec{\boldsymbol{E}} = (4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 8\hat{k}) m$$

Obtenga la magnitud del desplazamiento $2\vec{D} - \vec{E}$

Solución:

$$2\vec{D} = 12\hat{\boldsymbol{\imath}} + 6\hat{\jmath} - 2\hat{k} \, ,$$

así que

$$2\vec{D} - \vec{E} = 12\hat{\boldsymbol{\imath}} + 6\hat{\jmath} - 2\hat{k} - 4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 8\hat{k} = (12\hat{\imath} - 4\hat{\imath}) + (6\hat{\jmath} + 5\hat{\jmath}) + (-2\hat{k} - 8\hat{k})$$

$$= (8\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} - 10\hat{k}) m$$

La magnitud es entonces

$$|2\vec{\mathrm{D}} - \vec{\mathrm{E}}| = \sqrt{(8\mathbf{i})^2 + (11\mathbf{j})^2 + (-10\mathbf{k})^2} = 17\mathrm{m}$$

Multiplicación con vectores unitarios

Encuentre el ángulo entre dos vectores: $\vec{A} = 8\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ y el vector $\vec{B} = -5\hat{\imath} - 7\hat{\jmath}$

Solución:

Utilicemos el producto entre vectores así,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta = \sqrt{(8)^2 + (3)^2} + \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2} \cos\theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 73{,}5 \, cos \, \theta$$

Ahora bien,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_{\boldsymbol{x}} B_x + A_{\boldsymbol{y}} B_y + A_{\boldsymbol{z}} \, B_z = 8 \times (-5) + 3 \times (-7) = -61$$

Igualando ambos resultados tenemos

$$-61 = 73{,}5 \, cos \, \theta$$

Así que

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{-61}{73{,}5} \right) = 146{,}1°$$

Encuentre el producto cruz entre dos vectores:

a. $\vec{A} = 8\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ y el vector $\vec{B} = -5\hat{\imath} - 7\hat{\jmath}$

b. Verifique explicitamente que $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

Solución:

a. Hacemos uso de la expresión

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}\right) \times \left(B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}\right)$$

Entonces,

$$\vec{A} \times \vec{B} = (8\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) \times (-5\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j}\,)$$

$$= -40\,\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} - 56\,\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} - 15\,\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} - 21\,\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j}$$

Hacienco uso de las propiedades de vectores unitarios, nos queda

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0\ - 56\boldsymbol{k} + 15\boldsymbol{k} + 0 = -41\boldsymbol{k}$$

b. Evaluemos $\vec{B} \times \vec{A} = (-5\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j}\,) \times (8\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j})$

$$= -40\,\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} - 15\,\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} - 56\,\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} - 21\,\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j}$$

$$= 0\ + 56\boldsymbol{k} - 15\boldsymbol{k} + 0 = 41\boldsymbol{k}$$

Lo que verifica que

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$