Dinámica Rotacional

Hasta ahora, hemos realizado todo el análisis del movimiento y sus causas considerando a todo objeto como una partícula en la cual está concentrada toda su masa. El tratamiento de partículas puntuales es la forma correcta de describir el movimiento de traslación de todos los objetos. Por tanto, todo lo que hemos aprendido sobre las leyes de Newton, se aplica a las partículas puntuales y también a todos los demás tipos de objetos. Sin embargo, la aproximación de partículas puntuales no nos permite estudiar el movimiento de rotación de un objeto. Ahora aprenderemos a usar las leyes de Newton para describir y analizar el movimiento de rotación. Para hacerlo, tenemos que tratar los objetos de manera más realista, teniendo en cuenta su tamaño y forma.

Cuando estudiamos el movimiento de traslación de un cuerpo, el primer paso fue introducir los conceptos de posición, velocidad y aceleración. Debido a que el movimiento de traslación generalmente implica movimiento a lo largo de una trayectoria recta o lineal en el espacio, comúnmente se lo conoce como movimiento lineal. Por lo tanto, a la velocidad de traslación y a la aceleración a menudo se les denomina velocidad lineal y aceleración lineal respectivamente. Para estudiar el movimiento de rotación, necesitamos definir las cantidades de rotación análogas: posición angular, velocidad angular y aceleración angular.

Primero trataremos la rotación de un objeto extendido alrededor de un eje fijo. Esto se conoce comúnmente como movimiento de rotación pura. Consideraremos para nuestro análisis que el objeto es rígido y describiremos el movimiento de rotación en términos de variables angulares y tiempo. Esto se conoce como cinemática rotacional. Luego discutimos las causas de la rotación. Esto se conoce como dinámica rotacional.

Posición angular

El movimiento de rotación de un cuerpo rígido (o una partícula) alrededor de un eje está completamente especificado por un ángulo θ que forma una línea fija en el cuerpo rígido (o la partícula) con alguna línea fija de referencia en el espacio, generalmente elegida como eje x. Además, el movimiento de rotación se simplifica enormemente si θ se expresa en radianes. Este ángulo θ se define como la posición angular del cuerpo rígido (o la partícula).

La figura 1 representa un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo que pasa por el punto O, donde ese eje es perpendicular al plano de la figura. La línea OP está fijada en el cuerpo y completamente especificada en el tiempo t por la posición angular θ que hace la línea OP con respecto al eje x. Por lo tanto, la posición angular del cuerpo rígido, o la partícula en el punto P que tiene coordenadas polares (r, θ) es,

$$Posición\ angular = \theta$$

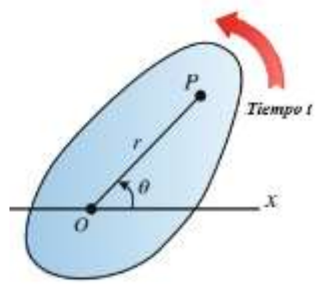


Figura 1. Representación de la definición de la posición angular θ de un cuerpo rígido, o una partícula en el punto P con coordenadas polares (r, θ), con respecto al eje x

Desplazamiento angular

Cuando el cuerpo rígido gira como se muestra en la figura 2., la posición angular de la línea OP cambia de θ_1 en el tiempo t_1 a θ_2 en un tiempo t_2. La cantidad $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ se define como el desplazamiento angular de un cuerpo rígido:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \qquad (1)$$

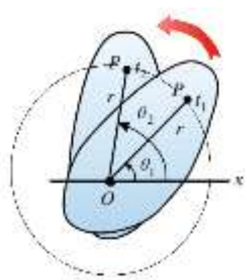


Figura 2. Representación del desplazamiento angular $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ de un cuerpo rígido que ocurre durante el intervalo de tiempo $t = t_2 - t_1$

Velocidad angular

De manera análoga a la velocidad lineal (de traslación) promedio, definimos la velocidad angular promedio ω como la razón de cambio del desplazamiento angular (ω es la letra griega omega en minúscula). Es decir:

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \qquad (2)$$

Y la velocidad instantánea angular como, el valor límite de la razón de cambio angular en el tiempo

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (3)$$

En unidades SI, la velocidad angular tiene la unidad de radianes por segundo (rad / s) y se puede escribir como segundo $^{-1}$ (s^{-1}) porque los radianes no son cantidades dimensionales.

Las dos últimas ecuaciones son válidas para todos los puntos del cuerpo rígido. Es decir, todos los puntos del cuerpo rígido giran a través del mismo desplazamiento angular al mismo tiempo.

Como en el movimiento lineal en una dimensión (donde la velocidad lineal puede ser positiva o negativa), tomamos ω como positivo si θ aumenta (en sentido contrario a las agujas del reloj) y ω como negativo si θ disminuye (en el sentido de las agujas del reloj).

Nota: *Un radián (1 rad) es el ángulo subtendido en el centro de un círculo de radio r por un arco de longitud s igual al radio del círculo, es decir, s = r, vea la figura 3a. Dado que la circunferencia de un círculo de radio r es s = 2π r, (360°) o uno revolución completa corresponde a un ángulo de (2πr) / r = 2π rad,.*
Por lo tanto:

$$1 \text{ rev} = 360° = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow 180° = \pi \text{ rad} \quad (8.1)$$

Por lo tanto:

$$1° = (\pi / 180) \text{ rad } 0.02 \text{ rad}$$
$$1 \text{ rad} = 180° / \pi \; 57{,}3°.$$

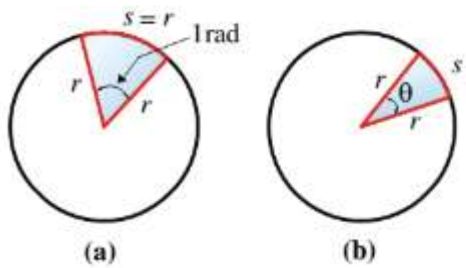


Figura 3. (a) Representación de la definición de un radian, (b) definición de un ángulo θ como la razón del arco s, respecto al radio r.

Generalmente, si θ (en radianes) representa cualquier ángulo arbitrario subtendido por un arco de longitud s en la circunferencia de un círculo de radio r, vea la figura 3.b, entonces se debe cumplir la siguiente relación:

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad (4)$$

Aceleración angular

Cuando la velocidad angular del cuerpo giratorio no es constante, el cuerpo tiene una aceleración angular. Suponga que ω_1 y ω_2 son las velocidades angulares en los tiempos t_1 y t_2, respectivamente, como se muestra en la figura 4. Luego, definimos la aceleración angular promedio α (alfa griega "α") como la tasa de cambio de la velocidad angular de la siguiente manera:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \qquad (5)$$

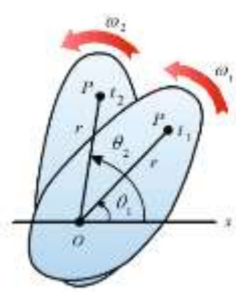


Figura 4. Representación del cambio de velocidad angular en un cuerpo rígido

Y la aceleración instantánea vendrá dada por la expresión,

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad (6)$$

La aceleración angular tiene unidades de rad/s^2 y puede escribirse como s^{-2}.

Ejercicio N°1:
Una línea de referencia en un disco giratorio tiene una posición angular dada por $\theta = 3t^2 - 12t + 9$, donde θ está en radianes y t está en segundos. Encuentre (a) ω y α en función del tiempo. (b) El tiempo en que la posición angular θ y la velocidad angular ω se vuelven cero. (c) Describa el movimiento de rotación del disco para $t \geq 0$.

Solución:

(a) Para determinar la velocidad angular, derivamos $\theta = 3t^2 - 12t + 9$ con respecto al tiempo, entonces,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(3t^2-12t+9)}{dt} = 6t - 12\ rad/s \qquad (1)$$

Por tanto, ω podría ser negativo o positivo dependiendo de t. Para encontrar la aceleración angular α, diferenciamos ω con respecto al tiempo.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(6t-12)}{dt} = 6\ rad/s^2 \qquad (2)$$

(b) Para determinar el tiempo para la posición y velocidad angular cero, igualamos a cero en la expresión para la posición angular, y resolvemos la ecuación de segundo grado.

$$\theta = 3t^2 - 12t + 9 = 0$$

Obtenemos entonces t= 1s y t= 3s.

Para la velocidad angular, resolvemos la ecuación (1) igualada a cero, así tenemos que,

$$\omega = 6t - 12 = 0$$

$$t = \frac{12}{6} = 2s$$

(c) podemos describir el movimiento de la siguiente manera

- Para el momento inicial t = 0, la línea de referencia está en $\theta = 9$ rad y la velocidad angular inicial del disco es $\omega = -12$ rad / s.
- A medida que aumenta el tiempo durante el intervalo $0 < t < 2$ s, tenemos $\omega < 0$. Es decir, el disco está girando en el sentido de las agujas del reloj, pero con una velocidad angular decreciente, ya que la aceleración angular es $6 rad/s^2$, $\alpha > 0$. Además, θ alcanza el valor $\theta = 0$ en t = 1 s, y luego alcanza valores negativos.
- En t = 2 s, el disco se detiene momentáneamente cuando $\theta = -3$ rad.
- A medida que aumenta el tiempo durante el intervalo $t > 2$ s, tenemos $\omega > 0$. Además, θ vuelve a cero nuevamente cuando t = 3 s. Posteriormente, tanto ω como θ aumentarán indefinidamente.

Aceleración angular constante

Las definiciones de cantidades angulares son similares a las de cantidades lineales, excepto que θ, ω y α reemplazan las variables lineales x, v y a, respectivamente. Por tanto, las ecuaciones angulares para la aceleración angular constante serán análogas a las presentadas en cinemática. La tabla resume las ecuaciones cinemáticas angulares y sus equivalentes lineales.

Ecuaciones lineales		*Ecuaciones angulares*
$v = v_o + a\,t$		$\omega = \omega_0 + \alpha\,t$
$x - x_o = 1/2\ (v_o + v)\ t$	$x \Leftrightarrow \theta$	$\theta - \theta_o = 1/2\ (\omega o + \omega)\ t$
$x - x_o = v_o\,t + 1/2\ a\,t^2$	$v \Leftrightarrow \omega$	$\theta - \theta_o = \omega o\ t + 1/2\ \alpha\,t^2$
$v^2 = v_o^2 + 2\,a\,(x - x_o)$	$a \Leftrightarrow \alpha$	$\omega^2 = \omega o^{\,2} + 2\,\alpha\,(\theta - \theta o)$

Podemos tratar la velocidad angular como un vector eligiendo el eje de rotación para que sea la dirección del vector de velocidad angular. Por convención, la regla de la mano derecha se usa para determinar esto. Para aplicar esta regla, doblamos los cuatro dedos de la mano derecha alrededor del eje de rotación y apuntamos los dedos restantes en la dirección de rotación; entonces el pulgar apuntaría en la dirección de ω. El vector de aceleración angular α = dω / dt estará a lo largo de ω, si | ω | aumenta con el tiempo y será opuesto a ω, si | ω | disminuye con el tiempo

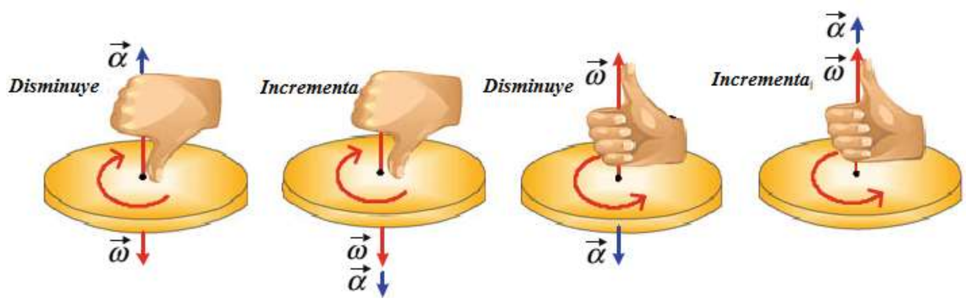


Figura 5. Uso de la regla de la mano derecha para obtener la dirección de los vectores ω y α mostrando los casos de incremento y disminución de la velocidad angular

Relaciones de cantidades angulares y lineales

Cuando un cuerpo rígido gira con velocidad angular ω, todos los puntos del cuerpo se mueven en un círculo con su centro en el eje de rotación, vea la figura 6. Debido a que el punto P en la figura se mueve en un círculo de radio r, este punto define un vector lineal **v** cuya dirección es siempre tangente a su trayectoria circular.

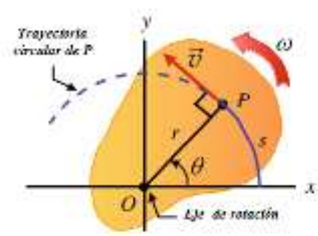


Figura 6. El punto P del cuerpo rígido que gira tiene una velocidad **v**, siempre tangente a la trayectoria circular de ese punto.

Esta velocidad tangencial tiene una magnitud definida por la velocidad tangencial **v** = ds/ dt, donde s es la longitud del arco recorrida por el punto P a lo largo de la trayectoria circular. Recordando que $s = r\,\theta$ y notando que r es constante, encontramos:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \qquad (7)$$

Usando la ecuación (3) $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, obtenemos

$$\vec{v} = r\omega \text{ (En radianes)} \qquad (8)$$

Esta relación indica que, aunque ω es el mismo para todos los puntos del cuerpo rígido, los puntos del objeto con diferentes radios tienen diferentes velocidades tangenciales **v**. De hecho, la velocidad tangencial aumenta a medida que uno se mueve hacia afuera desde el centro de rotación. Cuando la rapidez angular ω es constante, entonces la rapidez lineal v de cualquier punto del cuerpo rígido es constante y, por lo tanto, experimenta un movimiento circular uniforme.

El período de una revolución T = 2πr / v y la frecuencia se pueden escribir en términos de ω de la siguiente manera:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ (En radianes)} \qquad (9)$$

Podemos encontrar la magnitud de la aceleración tangencial $\mathbf{a_t}$, de un punto P, derivando la ec. (8) respecto a t,

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \qquad (10)$$

De la ec. (6) tenemos entonces que,

$$\vec{a} = r\alpha \text{ (En radianes)} \qquad (11)$$

Además, sabemos que un punto (o una partícula) que se mueve en una trayectoria circular de radio r con rapidez v, experimenta una aceleración radial $\vec{a}$ de magnitud $\vec{a} = \frac{v^2}{r}$ dirigida hacia el eje de rotación. Por lo tanto, al usar v= rω, la magnitud de la aceleración radial se convierte en:

$$\vec{a} = r\omega^2 \qquad (12)$$

Como se muestra en la figura 7. La aceleración lineal total, en un punto P es,

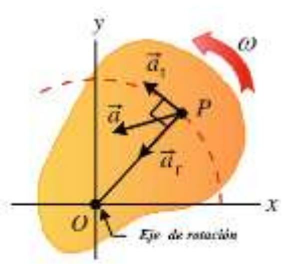


Figura 7. Componente radial y tangencial de la aceleración lineal total del punto P sobre un cuerpo rígido que está girando

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r \qquad (13)$$

Energía rotacional

Estudiemos ahora la energía cinética de un objeto rígido en rotación, considerando el objeto como una colección de partículas y suponiendo que gira alrededor de un eje z fijo con una velocidad angular (figura 8). Cada partícula tiene energía cinética determinada por su masa y velocidad lineal. Si la masa de la iésima partícula es m_i y su rapidez lineal es v_i, su energía cinética viene dada por la expresión

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad (14)$$

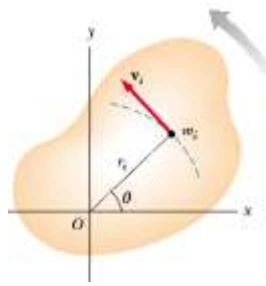


Figura 8. Cuerpo rígido girando en torno al eje z con una velocidad angular ω

Recordemos que aunque cada partícula en el objeto rígido tiene la misma velocidad angular, las velocidades lineales individuales dependen de la distancia r_i desde el eje de rotación según la expresión $\vec{v} = r\omega$. La energía cinética total del objeto rígido giratorio es la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales:

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

Reacomodemos términos en la última ecuación. Sabiendo que la velocidad angularω, es igual para cualquier partícula del cuerpo rígido, tenemos,

$$K_R = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 \qquad (16)$$

La cantidad entre paréntesis la definimos como el momento de inercia, y lo denotamos con la letra I,

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad (17)$$

Entonces podemos escribir,

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (18)$$

Aunque comúnmente nos referimos a la cantidad $\frac{1}{2} I \omega^2$como energía cinética rotacional, no es una nueva forma de energía. Es energía cinética ordinaria porque se deriva de una suma de energías cinéticas individuales de las partículas contenidas en el objeto rígido. Sin embargo, la forma matemática de la energía cinética dada por la ecuación 18 es conveniente cuando se trata de movimiento de rotación, siempre que sepamos cómo calcular el momento de inercia I.

Es importante que reconozcamos la analogía entre la energía cinética asociada con el movimiento de traslación y la energía cinética del movimiento de rotación. Las cantidades I y ω en el movimiento rotacional son análogas a m y v en movimiento lineal, respectivamente. De hecho, I toma el lugar de m cada vez que comparamos una ecuación de movimiento lineal con su contraparte rotacional.

El momento de inercia es una medida de la resistencia de un objeto a cambios en su movimiento rotacional, al igual que la masa es una medida de la tendencia de un objeto a resistir cambios en su movimiento lineal. Sin embargo, debemos tener en cuenta que la masa es una propiedad intrínseca de un objeto, ***mientras que I depende de la disposición física de esa masa***.

Ejercicio N°2:
Un disco compacto (CD) típico gira a 300 rev / min. (a) ¿Cuál es la velocidad angular del disco? (b) ¿Cuál es la rapidez lineal de un punto P que se encuentra a 4 cm de su eje, (c) Si un bit de datos está representado en el punto P y tiene una longitud de L = 0.5 µm, calcule el número de bits N que el cabezal de lectura puede leer por segundo.

Solución:
(a) Primero, escribimos la frecuencia f en unidades SI de la siguiente manera:

$$f = 300\ (\text{rev /min})(\ \text{min/ } 60\ \text{s}\ ) = 5\ \text{rev/s} = 5\ \text{Hz}$$

Ahora despejando la velocidad angular, de la ecuación (9)

$$\omega = 2\pi f = 31{,}4\ rad/s$$

(b) La velocidad lineal de un punto a 4 cm del eje del disco es:

$$\vec{v} = r\omega = (4\ x\ 10^{-2} m\ ) \cdot \left(31{,}4 \frac{rad}{s}\right) = 1{,}26\ m/s$$

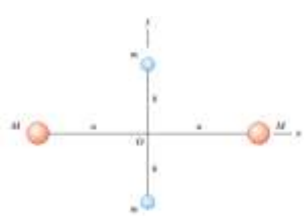
(c) Usando NL = v, obtenemos que el número de bit N que el cabezal de lectura puede leer por segundo es,

$$v = NL$$

Entonces,

$$N = \frac{v}{L} = \frac{1{,}26\ m/s}{0{,}5\ x\ 10^{-6}\ m} = 2{,}52\ x\ 10^{6} \frac{bits}{s} = 2{,}52\ Mb/s$$

Ejercicio N°3:
Se sujetan cuatro esferas diminutas a las esquinas de un marco de masa insignificante que se encuentra en el plano x-y (ver figura). Supondremos que los radios de las esferas son pequeños en comparación con las dimensiones del marco. Si el sistema gira alrededor del eje y con una rapidez angular ω, encuentre el momento de inercia y la energía cinética rotacional alrededor de este eje.



Solución
(a) Primero, observe que las dos esferas de masa m, que se encuentran en el eje y, no contribuyen al momento de inercia I es decir, r_i= 0 para estas esferas alrededor de este eje. Aplicando la ecuación 17 obtenemos,

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

Apliquemos ahora la ecuación 18 y determinemos la energía cinética

$$K_R = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2)\omega^2 = Ma^2\omega^2$$

Calculo del momento de inercia se un cuerpo rígido

Podemos evaluar el momento de inercia de un objeto rígido extendido imaginando el objeto dividido en muchos elementos de volumen pequeño, cada uno de los cuales tiene una masa m. Usamos la definición $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$ y tomamos el límite de esta suma cuando m tiende a cero. En este límite, la suma se convierte en una integral sobre todo el objeto:

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm \qquad (19)$$

Dinámica rotacional; Torque

La dinámica de rotación es el estudio del movimiento de rotación y las causas de los cambios en el movimiento. Así como el movimiento lineal es análogo al movimiento rotacional desde una perspectiva cinemática, veremos que esta analogía se aplica también desde una perspectiva dinámica.

Sabemos por nuestra experiencia cotidiana que, cuando un objeto gira alrededor de un eje, la velocidad de esta rotación depende de la magnitud y la dirección de la fuerza ejercida y de qué tan lejos se aplica esta fuerza desde el eje de rotación. Esta dependencia se mide mediante una cantidad vectorial denominada Torque (o momento) $\vec{\tau}$ (del griego tau "τ").

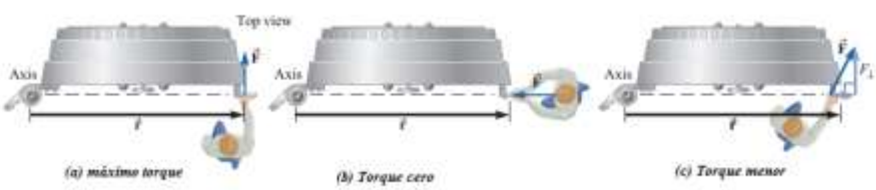


Figura 9. El torque sobre la puerta de la bóveda de un banco depende de la dirección de la fuerza aplicada. (a) Empujar perpendicularmente da el torque máximo. (b) Empujando radialmente hacia adentro con la misma magnitud la fuerza da un torque nulo. (c) El torque es proporcional a la componente perpendicular de la fuerza (F⊥)

Imagínese tratando de abrir la enorme puerta de la bóveda de un banco; el torque es proporcional a la magnitud de la fuerza. También importa dónde y en qué dirección se aplica la fuerza. Para una máxima eficacia, debe empujar perpendicularmente a la puerta (Fig.8a). Si empujara radialmente, directamente hacia el eje de rotación que pasa a través de las bisagras, la puerta no giraría, sin importar cuánto empujara (Fig. 8.b). Una fuerza que actúe en cualquier otra dirección podría descomponerse en componentes radiales y perpendiculares, y la componente radial no contribuirá en nada al torque (figura 8.c). Solo la componente perpendicular de la fuerza (F⊥) produce un momento de torsión.

La figura 9.a muestra una sección transversal de un cuerpo rígido que puede girar libremente alrededor de un eje fijo en O. Una fuerza $\overrightarrow{F}$ perpendicular al eje de rotación actúa sobre el cuerpo en el punto P, cuyo vector de posición desde O es $\vec{r}$. El ángulo más pequeño entre los dos vectores $\overrightarrow{F}$ y $\vec{r}$ es θ. La capacidad de la fuerza para hacer rotar el cuerpo alrededor de O desde el punto P depende del torque $\vec{\tau}$ de la siguiente manera:

$$\vec{\tau} = \vec{r} x \vec{F} \qquad (20)$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\,\left|\vec{F}\right| \sin\theta \qquad (21)$$

La unidad SI de torque es el N·m. La unidad SI de energía, el joule, es equivalente a N.m, pero no escribimos el torque en joules. Aunque tanto la energía como el par se pueden escribir usando las mismas unidades base SI, las dos cantidades tienen significados diferentes; el par no es una forma de energía. Para ayudar a mantener la distinción, el joule se usa como energía pero no como torque.

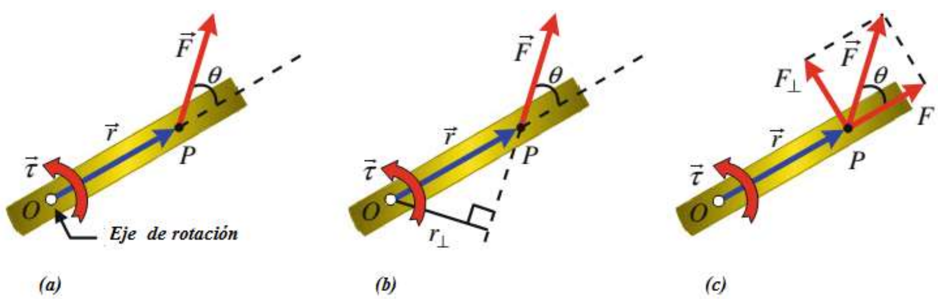


Figura 10. (a) El torque $\vec{\tau}$ producido por una fuerza $\vec{F}$ que actúa en el punto P sobre un cuerpo rígido que puede girar libremente alrededor de un eje que pasa por el punto O. (b) El momento de torsión se puede escribir como r⊥F, donde r⊥ es el brazo de momento de la fuerza $\vec{F}$. (c) El torque también se puede escribir como r F⊥, donde F⊥ es la componente perpendicular de la fuerza a $\vec{r}$.

Si dos o más fuerzas actúan sobre un cuerpo rígido, donde cada fuerza tiende a producir rotación alrededor de un eje que pasa por algún punto, el torque neto en el cuerpo se obtiene sumando todos los torques:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \tau_2 + \tau_3 + \cdots \qquad (22)$$

Condiciones de equilibrio de traslación y rotación

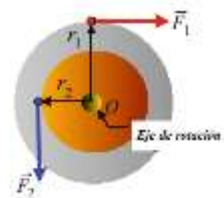
Un objeto en equilibrio mecánico debe satisfacer las siguientes dos condiciones:

1. La fuerza externa neta debe ser cero: $\sum \vec{F} = 0$
2. El torque externo neto debe ser cero: $\sum \vec{\tau} = 0$

La primera condición es un enunciado de equilibrio traslacional: la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto debe ser cero, por lo que el objeto no tiene aceleración traslacional. La segunda condición es una declaración de equilibrio rotacional: la suma de todos los pares en el objeto debe ser cero, por lo que el objeto no tiene aceleración angular. Para que un objeto esté en equilibrio, debe trasladar y rotar a una velocidad constante.

Debido a que podemos elegir cualquier ubicación para calcular los pares, generalmente es mejor seleccionar un eje que haga que al menos un par sea igual a cero, solo para simplificar la ecuación del par neto.

EjercicioN°3: Dos ruedas de radio r_1 = 20 cm y r_2 = 30 cm se sujetan juntas como se muestra en la figura. Juntas, pueden girar libremente alrededor de un eje O perpendicular a la página. Dos fuerzas de las magnitudes $|\vec{F}_1| = 20N$ y $|\vec{F}_1| = 40N$ se aplican como se muestra en la figura. Encuentra el torque neto en la rueda.



Solución:
Tomemos el torque en sentido anti-horario como positivo. Entonces la fuerza **F**$_1$ produce torque τ_1 que tiende a girar la rueda en el sentido de las agujas del reloj. Por tanto, el signo de τ_1 es negativo e igual a $-F_1r_1$. La fuerza **F**$_2$ produce un par de torsión τ_2 que tiende a girar la rueda en sentido anti-horario. Por tanto, el signo de τ2 es positivo e igual a + F_2r_2. Usando la ecuación. 16, el torque neto es:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \tau_2$$
$$\sum \vec{\tau} = -F_1r_1 + F_2r_2$$
$$= (-20N)(20x10^{-2}m) + (40N)(30x10^{-2}m)$$
$$= 8\, m \cdot N$$

Relación del torque y la aceleración angular
Consideremos una partícula de masa m unida a un extremo de una varilla de masa despreciable mientras que el otro extremo puede girar libremente en el punto O. La masa gira en un círculo de radio r, bajo la influencia de una fuerza tangencial $\vec{F}_t$, como se muestra en la figura 11. En esta figura no mostramos la fuerza radial.

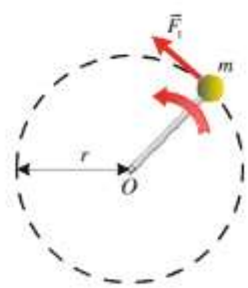


Figura 11. Una partícula de masa m gira en un círculo de radio r bajo la influencia de una fuerza tangencial $\vec{F}_t$

De acuerdo con la segunda ley de Newton la fuerza $\vec{F}_t$ produce una aceleración $\vec{a}_t$, entonces

$$\vec{F}_t = m\vec{a}_t$$

Sabemos que $\vec{a} = r\alpha$, entonces

$$\vec{F}_t = mr\alpha \qquad (23)$$

El torque producido por esta fuerza será

$$\vec{\tau} = \vec{r}\left|\vec{F}\right|\sin\theta$$
$$\vec{\tau} = r \cdot F$$
$$\vec{\tau} = r \cdot (mr\alpha)$$

$$\vec{\tau} = (mr^2) \cdot \alpha$$

$$\vec{\tau} = I \cdot \alpha \tag{24}$$

Es decir, el torque que actúa sobre la partícula es proporcional a su aceleración angular y la constante de proporcionalidad es el momento de inercia. Es importante notar que es el análogo rotacional de la segunda ley de movimiento de Newton. $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Podemos aplicar este resultado a un sistema de partículas ubicadas a varias distancias de un determinado eje de rotación. Para la iésima partícula, aplicamos ec. 17 para obtener $\vec{\tau}_i = \left(m_i \cdot r_i^2\right)\alpha$ Entonces, el torque total alrededor de ese eje será τ = (mi ri2) α = Iα. Por lo tanto:

$$\tau = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\alpha = I \cdot \alpha$$