Unidad 13

- Amortización y Fondos de Amortización

INTRODUCCION

En la sección 6.8 se mencionó que la palabra amortizar proviene del latín y que su significado literal es "dar muerte". En matemática financiera amortizar significa pagar una deuda y sus intereses por medio de una serie de pagos periódicos, generalmente de igual valor.

Al amortizar una deuda cada pago efectuado se divide en dos partes: en primer lugar se pagan los intereses adeudados al momento en que se efectúa el pago y el resto se aplica a disminuir el capital. Como cada pago reduce el capital, los intereses que se pagan en cada periodo van disminuyendo; por tanto, resulta evidente que la amortización de una deuda se lleva a cabo calculando los intereses sobre el saldo insoluto*.

La amortización es una de las aplicaciones más importantes de las anualidades. En efecto, cuando se amortiza una deuda efectuando pagos periódicos iguales, la deuda es el valor actual de una anualidad. El valor de la anualidad o pago periódico se calcula utilizando la fórmula de valor presente correspondiente al tipo de anualidad utilizada, vencida o anticipada.

EJEMPLO 11.1

Un préstamo de $ 4,000.00 se va a amortizar por medio de 8 pagos mensuales iguales. Hallar el valor del pago mensual si la tasa de interés es del 34% capitalizable mensualmente.

SOLUCIÓN

En este problema se nos pide que calculemos el valor de una anualidad cuyo valor actual es de $ 4,000.00. Dado que el enunciado del problema no menciona el tipo de anualidad, se supone que se trata de una anualidad ordinaria. Despejando A de la ecuación (8.2), se tiene:

$$A = \frac{Pi}{1-(1+i)^{-n}}$$

---

* *Cobrar intereses sobre saldos insolutos consiste en cobrar intereses solamente por el capital aún no pagado.*

donde

$P = 4{,}000$

$n = 8$

$i = 0.34/12$

Por tanto,

$$A = \frac{(4{,}000)\,(0.34/12)}{1-(1+\frac{0.34}{12})^{-8}} = \frac{113.333333333}{0.200297063371}$$

$A = \$\ 565.85$

Se necesitan S pagos mensuales de $ 565.85 cada uno con el fin de amortizar la deuda de $ 4,000.00.

TABLAS DE AMORTIZACIÓN

Con el fin de mostrar el comportamiento de una deuda que se está amortizando, periodo a periodo, es conveniente la elaboración de una tabla de amortización, la cual se puede definir como un cuadro o tabla donde se muestra tanto la cantidad pagada de intereses como la cantidad pagada de capital.

EJEMPLO 11.2

Elaborar la tabla de amortización para el ejemplo 11.1.

SOLUCIÓN

La tabla de amortización será:

Mes	Saldo insoluto	Interés sobre el saldo insoluto	Pago mensual	Amortización*
0	4,000.00			
1	3,547.50	113.33	565.83	452.50
2	3,082.18	100.51	565.83	465.32
3	2,603.68	87.33	565.83	478.50
4	2,111.62	73.77	565.83	492.06
5	1,605.62	59.83	565.83	506.00
6	1,085.28	45.49	565.83	520.34
7	550.20	30.75	565.83	535.08
8	– 0.04**	15.59	565.83	550.24
TOTALES		$ 526.60	$ 4,526.64	$ 4,000.04

* *Se refiere al pago al capital*

** *En este lugar debería quedar exactamente un cero. La diferencia de 4 centavos se debe a que el pago mensual fue redondeado al centavo más próximo. Si se utiliza como pago mensual la solución matemáticamente exacta de 565.8262354, el saldo insoluto al final del octavo mes será cero.*

A continuación se explicará la forma como se elaboró la tabla de amortización.

El saldo insoluto (columna 2) al principio del primer mes (mes 0) es la deuda original de \$ 4,000.00. El interés vencido al final de ese mismo mes (mes 1) se determinó utilizando la fórmula del interés simple:

$$I = (4{,}000)\left(\frac{0.34}{12}\right)(1) = \$\ 113.33$$

El pago mensual (columna 4) es de \$ 565.83, de los cuales se utilizan \$ 113.33 para el pago del interés vencido y el resto, \$ 565.83 - \$ 113.33 = \$ 452.50, se utilizan como abono al capital (amortización). Al principio del segundo mes (final del primer mes) el saldo insoluto es de \$ 4,000 - \$ 452.50 = \$ 3,547.50. Al término de este segundo mes, el interés vencido es:

$$I = (3{,}547.50)\left(\frac{0.34}{12}\right)(1) = \$\ 100.51$$

Del pago mensual quedan \$ 565.83 - \$ 100.51 = \$ 465.32 como abono al capital. Al principio del tercer mes (final del segundo mes), el saldo insoluto es de \$ 3,547.50 - \$ 465.32 = \$ 3,082.18, y así sucesivamente.

El lector puede verificar que:

1. La parte de cada pago mensual que se usa para pagar intereses sobre la deuda es decreciente y el resto del pago que se aplica a la deuda misma es creciente.
2. suma de pagos mensuales = amortización + intereses

   4,526.64 = 4,000.04 + 526.60
3. Cada una de las cantidades mostradas en la columna 2 (saldo insoluto) representa el valor actual de los pagos mensuales por realizar. Por ejemplo, el renglón 3 muestra el valor actual de 5 pagos por efectuar:

$$565.83\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.34}{12}\right)^{-5}}{\left(\frac{0.34}{12}\right)}\right] = 2{,}603.68$$

EJEMPLO 11.3

Antonio compra una casa valuada en \$ 230,000.00 y paga \$ 15,000.00 de enganche. Antonio obtiene un préstamo hipotecario a 20 años por el saldo. Si se cobra un interés del 29% capitalizable cada mes, ¿cuál sería el valor del pago mensual? Elabórese una tabla de amortización para los primeros 10 meses.

SOLUCIÓN

El valor del pago mensual será:

$$A = \frac{(215{,}000)\left(\frac{0.29}{12}\right)}{1-\left(1+\frac{0.29}{12}\right)^{-240}} = \$\ 5{,}212.74$$

Obtenido el pago mensual se elaborada la tabla de amortización.

Mes	Saldo insoluto	interés sobre el saldo insoluto	Pago mensual	Amortización
0	215,000.00			
1	214,983.09	5,195.83	5,212.74	16.91
2	214,965.77	5,195.42	5,212.74	17.32
3	214,948.04	5,195.01	5,212.74	17.73
4	214,929.88	5,194.58	5,212.74	18.16
5	214,911.28	5,194.14	5,212.74	18.60
6	214,892.23	5,193.69	5,212.74	19.05
7	214,872.72	5,193.23	5,212.74	19.51
8	214,852.74	5,192.76	5,212.74	19.98
9	214,832.27	5,192.27	5,212.74	20.47
10	214,811.31	5,191.78	5,212.74	20.96

Nótese que la mayor parte del pago mensual se destina al pago de intereses, y la amortización al capital, en cambio, es muy pequeña. En una deuda que se amortiza a largo plazo ocurre que durante algunos años la mayor parte del pago periódico tiene como finalidad el pago de los intereses.

Un problema que se presenta comúnmente es el de conocer la forma en que se distribuye un determinado pago en intereses y abono al capital, sin necesidad de hacer toda la tabla de amortización.

EJEMPLO 11.4

Con respecto al ejemplo 11.3, hacer la distribución del pago número 7. Asimismo, encontrar el saldo insoluto que se tiene una vez efectuado dicho pago.

SOLUCIÓN

Los intereses que se pagan al efectuar el pago número 7 son calculados en base al saldo insoluto que se tiene después de hecho el pago número 6, y este saldo insoluto, ya se mencionó, es igual al valor actual de los pagos que faltan. Al efectuar el pago número 6, faltan 240- 6 = 234 pagos por realizar; por tanto:

$$\text{saldo insoluto} = P = 5{,}212.74\left[\frac{1-(1+\frac{0.29}{12})^{-234}}{\frac{0.29}{12}}\right] = \$\ 214{,}892.13$$

El interés correspondiente al pago número 7 será:

$$I = (214{,}892.13)\ (\frac{0.29}{12})\ (1) = \$\ 5{,}193.23$$

Por tanto, la amortización (abono al capital) será de:

5,212.74 – 5,193.23 = $19.51

El saldo insoluto, una vez efectuado el pago número 7 viene dado por la diferencia:

214,892.13 - 19.51 = $ 214,872.62

El lector puede verificar los resultados obtenidos observando la tabla de amortización. Las diferencias que se observan se deben al redondeo de las cantidades.

EJEMPLO 71.5

Utilizando el ejemplo 11.3, hacer la distribución del pago número 1(X). Encontrar también el saldo insoluto una vez efectuado dicho pago.

SOLUCION

Para encontrar la forma en que se distribuye el pago número 100, se debe hallar el saldo insoluto después de haber efectuado el pago número 99. El saldo insoluto es el valor presente de 141 pagos por realizar.

$$P = 5{,}212.74\left[\frac{1-(1+\frac{0.29}{12})^{-141}}{\frac{0.29}{12}}\right]$$

$$P = \$\ 208{,}259.30$$

El interés correspondiente al pago número 100 es:

$$I = (208{,}259.30)\ (\frac{0.29}{12})\ (1) = \$\ 5{,}032.93$$

amortización = 5,212.74 - 5,032.93 = $ 179.81

El saldo insoluto una vez efectuado el pago número 100 será:

208,259.30 – 179.81 = $ 208,079.49

Obsérvese como a pesar de que ya se han efectuado 100 pagos, un total de 5,212.74 x 100 = $ 521,274, el capital tan sólo se ha reducido en $ 215,p00 - $ 28,079.49 = $ 6,920.51. Una cantidad bastante pequeña en poco más de 8 años de pagos mensuales.

EJEMPLO 11.6

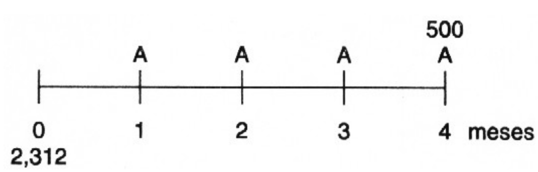
Un laboratorio de análisis químicos compra una centrífuga en 2,890 dólares, que se va a pagar de la siguiente manera:

- 20% de enganche
- 4 pagos mensuales iguales.
- 500 dólares que se entregarán junto con el último pago.

Si la tasa de interés es del 10% anual capitalizable cada mes,

a) Calcúlese el valor del pago mensual.
b) Formúlese la tabla de amortización.

SOLUCIÓN



Para calcular el valor del pago mensual se formula la siguiente ecuación de valor:

$$2{,}312 = A\left[\frac{1-(1+\frac{0.10}{12})^{-4}}{\frac{0.10}{12}}\right] + 500\,(1+\frac{0.10}{12})^{-4}$$

$$2{,}312 = 3.918035414A + 483.6748525$$

$$A = 466.64 \text{ dólares}$$

Mes	Saldo insoluto	Interés sobre el saldo insoluto	Pago mensual	Amortización
0	2,312.00			
1	1,864.62	19.27	466.64	447.38
2	1,413.52	15.54	466.64	451.10
3	958.65	11.78	466.64	454.86
4	0.	7.99	966.64	958.65
TOTALES		54.58	2,366.56	2,311.99

EJEMPLO 11.7

Una institución educativa lleva a cabo una rifa donde el primer premio consiste en $ 100,000.00. De acuerdo a las reglas establecidas para la entrega de los premios, el ganador del primer premio recibirá de inmediato $ 10,000.00 y el resto se depositará en un fondo de inversión que paga el 21.8% capitalizable cada semestre, del cual se retirarán $ 20,000.00 al final de cada semestre. ¿Cuántos retiros se podrán hacer? Elabórese la tabla de amortización.

SOLUCIÓN

$$90{,}000 = 20{,}000\left[\frac{1-(1+\frac{0.218}{2})^{-n}}{\frac{0.218}{2}}\right]$$

$$(1.109)^{-n} = 1 - 0.4905 = 0.5095$$

$$-n \log 1.109 = \log 0.5095$$

$$n = \frac{-\log 0.5095}{\log 1.109}$$

$$n = 6.5178218 \text{ semestres}$$

El ganador del primer premio podrá efectuar 6 retiros semestrales de $ 20,000.00 cada uno y un último retiro de menos de $ 20,000.00, al final del séptimo semestre.

Semestre	Saldo	Intereses sobre el saldo	Retiro mensual	Retiro sobre el capital
0	90,000.00			
1	79,810.00	9,810.00	20,000	10,190.00
2	68,509.29	8,699.29	20,000	11,300.71
3	55,976.80	7,467.51	20,000	12,532.49
4	42,078.27	6,101.47	20,000	13,898.52
5	26,664.80	4,586.53	20,000	15,413.47
6	9,571.26	2,906.46	20,000	17,093.54
7	0.00	1,043.27	10,614.53	9,571.26

El último retiro será de $ 10,614.53. Nótese como esta cantidad se obtuvo de una forma automática al construir la tabla.

EJEMPLO 17.8

Se liquida una deuda mediante cinco pagos mensuales de $ 1,965.19 cada uno, los cuales incluyen intereses del 36% anual capitalizable cada mes. Encuentre el valor original de la deuda y elabore la tabla de amortización.

SOLUCION

Se calcula el valor presente de los pagos:

$$P = 1{,}965.19\,\frac{1-(1+0.03)^{-5}}{0.03}$$

$$P = \$\,9{,}000$$

La tabla de amortización es la siguiernte:

Mes	Saldo insoluto	Intereses sobre el saldo insoluto	Pago mensual	Amortización
0	9,000.00			
1	7,304.81	270.00	1,965.19	1,695.19
2	5,558.76	219.14	1,965.19	1,746.05
3	3,760.33	166.76	1,965.19	1,798.43
4	1,907.95	112.81	1,965.19	1,852.38
5	0.00	57.24	1,965.19	1,907.95
TOTALES:		$ 825.95	$ 9,825.95	$ 9,000.00

EJEMPLO 11.9

Resuelva el problema anterior mediante la amortización a interés simple, tal como se vio en la sección 6.8 del capítulo 6. Compare resultados.

SOLUCION

La amortización al capital es:

a = 9,000/5 = $ 1,800

Mes	Saldo insoluto	Amortización al capital	Intereses	Pago total
1	9,000.00	1,800.00	270.00	2,070.00
2	7,200.00	1,800.00	216.00	2,016.00
3	5,400.00	1,800.00	162.00	1,962.00
4	3,600.00	1,800.00	108.00	1,908.00
5	1,800.00	1,800.00	54.00	1,854.00
TOTALES:		$ 9,000.00	$ 810.00	$ 9,810.00

Los intereses calculados mediante la amortización a interés simple son menores a los calculados mediante la amortización a interés compuesto. Esto se debe porque los abonos al capital son más altos en la amortización a interés simple.

Ejercicios 11.1

1. Una deuda de $ 6,500.00 se debe amortizar en un año con pagos mensuales iguales con el 24% sobre saldos insolutos. Hallar el valor de cada pago y hacer la tabla de amortización.
2. Un deuda de $ 30,000.00 con intereses al 28% capitalizable trimestralmente, debe ser amortizada con pagos de $ 4,271.33 por trimestre vencido. Hacer la tabla de amortización.
3. Un automóvil cuyo precio de contado es de $ 45,730.00 se vende con un enganche del 10% del precio de contado y el saldo en pagos quincenales a 3 meses de plazo, con un interés del 33.648% capitalizable cada quincena. Elaborar la tabla de amortización.
4. Una persona solicita un préstamo de $ 85,000.00 para ser amortizado en pagos mensuales durante 2 años con intereses del 2.5% mensual capitalizable cada mes. Hallar la distribución del pago número 12 así como el saldo insoluto después de haber efectuado dicho pago.
5. Gloria compró una computadora a crédito la cual tenía un precio de contado de $ 7,340.00. La compra fue sin enganche y a un plazo de 18 meses para pagar, con una tasa de interés del 34.08% compuesto mensualmente. Determine la cantidad que Gloria deberá pagar si al cabo de 10 meses desea liquidar el total de la deuda.
6. Se compró una automóvil nuevo cuyo valor es de $ 73,000.00, a un plazo de 20 pagos trimestrales, sin enganche y con una tasa de interés del 26% capitalizable cada trimestre. Calcular la cantidad amortizada y el saldo insoluto después de transcurridos 3 años.
7. El señor Rivera compró un departamento a 10 años con pagos mensuales de $ 3,112.10. Si la tasa de interés es del 28% capitalizable cada mes, calcule la cantidad que hay que pagar para saldar la deuda al cabo de 7 años. ¿Qué cantidad de intereses se han pagado en estos 7 años?
8. Un préstamo por $ 50,000.00 se amortizará mediante 5 pagos cuatrimestrales

iguales y junto con el quinto pago se entregará $ 15,000.00. Si la tasa de interés es del 32.04% capitalizable cada 4 meses, encontrar el pago cuatrimestral y elaborar la tabla de amortización.

9. Una pareja de recién casados compra un departamento de $ 95,000.00 pagando $ 15,000.00 de enganche y por el saldo adquieren un crédito hipotecario a 12 años con una tasa de interés del 27% capitalizable cada mes.

    a) Calcule el pago mensual.

    b) ¿Qué cantidad del pago número 72 se destina a intereses y qué cantidad se aplica a reducir la deuda?

    c) ¿Qué cantidad se debe inmediatamente después de efectuado el pago número 72?

10. Con respecto al ejercicio anterior, supóngase que a los pocos días de efectuado el pago número 55 la tasa de interés baja al 22%, capitalizable cada mes. ¿Cuál será el valor del nuevo pago mensual?

11. El señor Salinas compra a crédito un automóvil que vale $ 53,000.00. Las condiciones de pago son las siguientes:

    - 8% de enganche
    - 6 pagos mensuales iguales
    - $ 10,000.00 que se entregarán junto con el último pago

    Si la tasa de interés es del 32% capitalizable mensualmente:

    a) Calcúlese el valor del pago mensual.

    b) Elabórese la tabla de amortización.

12. Cynthia adquiere un mueble en $ 3,260.00 y acuerda pagar esa cantidad mediante abonos mensuales de $ 593.00. Si el interés se cobra a razón del 30.695% capitalizable cada mes, ¿cuántos pagos se harán? Elabore la tabla de amortización de la deuda.

13. Tomás tiene una deuda de $ 1,500.00 la cual va a amortizar efectuando pagos de $ 250.00 al final de cada trimestre.

    a) Determine el número de pagos completos que serán necesarios, si la tasa de interés es del 21.36% compuesto cada trimestre.

    b) Elabore la tabla de amortización.

    c) Determine el valor del pago final, si éste se realiza un trimestre después de realizado el último pago completo?

14. Se liquida una deuda mediante 5 pagos mensuales de $ 1,500.00 cada uno, los cuales incluyen intereses del 36% anual capitalizable cada mes. Encuentre el valor original de la deuda y elabore la tabla de amortización.

15. Resuelva el problema anterior mediante la amortización a interés simple y compare los resultados.

FONDOS DE AMORTIZACIÓN

Una suma de dinero que se va acumulando con el fin de obtener un determinado monto se llama fondo de amortización. El fondo de amortización generalmente se forma invirtiendo cantidades iguales al final de periodos iguales; esto significa que el valor del fondo, al final de un cierto tiempo, corresponde al monto de una anualidad ordinaria.

Los fondos de amortización se establecen con el fin de pagar una deuda que vence en fecha futura, para la compra de equipo nuevo que sustituya al equipo depreciado u obsoleto, para los fondos de jubilación, etcétera.

Si bien los fondos de amortización y la amortización de deudas se utilizan con el fin de pagar una obligación, existe una clara diferencia entre ellos: los pagos periódicos de una amortización se destinan a liquidar una deuda que ya se tiene; mientras que los pagos periódicos hechos a un fondo de amortización tienen como objetivo la acumulación con el fin de liquidar una deuda futura.

EJEMPLO 11.10

La vida útil de un cierto equipo industrial que acaba de ser adquirido por una compañía es de 5 años. Con el fin de reemplazarlo al final de este tiempo, la compañia establece un fondo de amortización efectuando depósitos anuales en una cuenta bancaria que paga el 9.6%, anual. Si se estima que el equipo costará 42,740 dólares, halle el valor del depósito.

SOLUCION

Se trata de hallar el pago periódico de una anualidad ordinaria cuyo monto será 42,740 dólares al final de 5 años y cuya tasa de interés es del 9.6'%.

$$A = \frac{(42{,}740)\,(0.096)}{1.096^5 - 1}$$

$$A = 7{,}056.68 \text{ dólares}$$

El fondo de amortización se forma invirtiendo 7,056.68 dólares al final de cada año, durante 5 años.

Una tabla de capitalización, llamada también tabla de fondo de amortización, muestra la forma en que se acumula el dinero, periodo tras periodo, en un fondo de amortización.

EJEMPLO 11.11

Elaborar la tabla de capitalización del ejemplo anterior.

Año	Cantidad en el fondo al inicio del año	Interés ganado	Depósito hecho al final del año	Monto al final del año
1	0	0	7,056.68	7,056.68
2	7,056.68	677.44	7,056.68	14,790.81
3	14,790.81	1,419.92	7,056.68	23,267.41
4	23,267.41	2,233.67	7,056.68	32,557.77
5	32,557.77	3,125.55	7,056.68	42,740.00
TOTALES		**$ 7,456.58**	**$ 35,283.40**	

El interés ganado al final del año se obtiene utilizando la fórmula del interés simple, usando como capital la cantidad al inicio del año.

I = (7,056.68) (0.096) (1) = 677.44

El monto al final del año, que es exactamente igual a la cantidad en el fondo al inicio del año, se obtiene sumando la cantidad al inicio del año más el interés ganado más el depósito hecho al final del año:

7,056.68 + 677.44 + 7,056.68 = 14,790.81

Los depósitos hechos al final del año no ganan intereses.

La suma de la columna 'interés ganado" más la suma de la columna "depósito hecho al final del año" es igual al monto o valor futuro de la anualidad:

7,456.58 + 35,283.40 = 42,739.98

La diferencia de 2 centavos se debe al redondeo de las cantidades.

EJEMPLO 11.12

Ramón desea tener $ 12,000.00 para darlos de enganche para una casa. Si puede ahorrar $1,300.00 cada mes en un banco que le paga una tasa de interés del 2.24% mensual, ¿cuánto tiempo se tardará en acumular los $ 12,000.00? constrúyase la tabla de capitalización.

SOLUCION

$$12{,}000 = 1{,}300\,\frac{(1.0224)^n - 1}{0.0224}$$

$$0.2067692308 = (1.0224)^n - 1$$

$$(1.0224)^n = 1.2067692308$$

$$n = \frac{\log 1.2067692308}{\log 1.0224}$$

$$n = 8.484106 \text{ meses}$$

Ramón tendrá que hacer 8 depósitos mensuales de $ 1,300.00 más un noveno depósito por una cantidad menor a $1,300.00..

Mes	Cantidad en el fondo al inicio del mes	Interés ganado	Depósito hecho al final del mes	Monto al final del mes
1	0	0	1,300	1,300.00
2	1,300.00	29.12	1,300	2,629.12
3	2,629.12	58.89	1,300	3,988.01
4	3,988.01	89.33	1,300	5,377.34
5	5,377.34	120.45	1,300	6,797.80
6	6,797.80	152.27	1,300	8,250.07
7	8,250.07	184.80	1,300	9,734.87
8	9,734.87	218.06	1,300	11,252.93
9	11,252.93	252.07	495	12,000.00

El noveno depósito será por $ 495.00.

Ejercicios 11.2

1. Una persona desea reunir $1,350.00 para comprar una cámara fotográfica dentro de 3 meses. ¿Cuánto deberá depositar cada quincena en una cuenta bancaria que paga el 20% de interés capitalizable quincenalmente? Elabore la tabla de capitalización.
2. Una persona desea reunir $ 30,000.00 en 3 años, haciendo depósitos cuatrimestrales en una cuenta de ahorros que paga el 18% capitalizable cuatrimestralmente. Después de un año el banco elevó la tasa de interés al 22%. Si los depósitos continuaron igual, ¿cuál será el monto al final de 3 años? Elabore la tabla de capitalización.
3. Araceli pide $ 5,500.00 prestados por 6 meses al 32% compuesto cada trimestre. Araceli piensa establecer un fondo de amortización para saldar la deuda al final de los 6 meses. Si el fondo paga un interés del 26% compuesto cada mes, ¿cuál será el valor del depósito mensual? Elabórese la tabla de capitalización.
4. Resuelva el ejemplo 11.10 si Ramón puede ahorrar $1,450.00 y la tasa de interés es del 2.7% mensual.
5. Adriana desea ahorrar $ 6,350.00 con el fin de comprar una microcomputadora. Si puede ahorrar $ 1,000.00 cada mes y puede invertir esa cantidad al 25% capitalizable mensualmente, ¿cuántos depósitos completos hará y cuál será el valor del depósito final? Elabore la tabla de capitalización.